Espaces de Banach et applications spectre et spectre essentiel

Dehici Abdelkader

Laboratoire d'Informatique et Mathématiques
Université de Souk-Ahras, Algérie

Premier Workshop maghrébin en Mathématiques, Laboratoire LATAO
Tunis, 08-11 Mai 2017

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur la théorie spectrale et la théorie de Fredholm

- X un espace de Banach complexe de dimension infinie;
  - $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur X;
  - $\mathcal{K}(X)$ désigne le sous-espace des opérateurs compacts sur X;
- Si $A \in \mathcal{L}(X)$,
  - on écrit $N(A) \subseteq X$ et $R(A) \subseteq X$ pour le noyau et l'image de A. On pose $\alpha(A) := \dim N(A)$, $\beta(A) :=$ codim $R(A)$;
  - A à image fermée. Alors A est un opérateur $\Phi_+ (A \in \Phi_+(X))$ si $\alpha(A) < \infty$, et A est un opérateur Φ_- $(A \in \Phi_-(X))$ si $\beta(A) < \infty$. Pour $A \in \Phi_{\mp}(X) = \Phi_-(X) \bigcup \Phi_+(X)$;
  - l'indice de A est défini par $i(A) = \alpha(A) - \beta(A) \in \mathbb{Z} \bigcup \{\pm\infty\}$.

- Un opérateur A est dit semi-Fredholm si
  - A est à image fermée et
  - $\min.\mathrm{ind}(A) = \min\{\alpha(A), \beta(A)\}$ est finie.
- L'ensemble des opérateurs semi-Fredholm $\Phi_{\mp}(X)$ est un ouvert, et l'indice est une fonction localement constante invariante sous les perturbations par les opérateurs compacts.
- Les opérateurs de Fredholm ne sont autres que les éléments de l'ensemble $\Phi(X) = \Phi_{+}(X) \bigcap \Phi_{-}(X)$.

(Sur ces notions, on peut par exemple consulter le livre de V. Mueller "Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebra", Birkhäuser Verlag, Basel, 2003).

- Désignons par
  - $\Phi_0(X)$ l'ensemble des **opérateurs de Fredholm d'indices 0**.
  - $\sigma(A)$ le **spectre** de A .
  - $\sigma_p(A)$ le **spectre ponctuel** de A, est l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ n'est pas injective (l'ensemble des valeurs propres de A).
  - $\sigma_r(A)$ le **spectre résiduel** de A, est l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injective et $R(A)$ n'est pas dense dans X.
  - $\sigma_c(A)$ le **spectre continu** est l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - A$ est injective et $R(A)$ est dense mais non fermée dans X.
  - $\rho(A)$ **l'ensemble résolvant** de A, est le complémentaire de $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$.
- On dit que le nombre complexe λ est dans φ_{+A}, φ_{-A}, $\varphi_{\mp A}$, φ_A ou φ_A^0 si $\lambda I - A$ est dans $\Phi_+(X), \Phi_-(X), \Phi_\mp(X)$, $\Phi(X)$ ou $\Phi_0(X)$.

Proposition 1

1. $\varphi_{+A}, \varphi_{-A}, \varphi_{\mp A}, \varphi_A$ et φ_A^0 sont des ensembles ouverts du plan complexe $\mathbb{C}$, de plus on a
2. $\alpha(\lambda I - A)$ et $\beta(\lambda I - A)$ sont constantes sur chaque composante de φ_A excepté un nombre discret de points.

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$.

- Un point $\lambda \in \sigma(A)$ est dans le **spectre essentiel de Kato** de A noté, $\sigma_K(A)$ si $\lambda \notin \varphi_{\mp A}$.
- Un point $\lambda \in \sigma_e(A)$ est dans le **spectre essentiel de Wolf** de A, si $\lambda \notin \varphi_A$,
- le **spectre essentiel de Weyl** (ou de **Schechter**) $\sigma_w(A) = \bigcap\limits_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A+K)$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{C} \backslash \varphi_A^0$.

Tous ces spectres essentiels sont des ensembles compacts non-vides du plan complexe $\mathbb{C}$ satisfaisant les inclusions suivantes:

$$\partial\sigma_e(A) \subseteq \sigma_K(A) \subseteq \sigma_e(A) \subseteq \sigma_w(A) \subseteq \sigma(A).$$

(où $\partial\sigma_e(A)$ est le bord de l'ensemble $\sigma_e(A)$).

Remarque 1

Signalons que les noms modernes des **spectres essentiels** de **Kato** et de **Wolf** sont respectivement, le **spectre essentiel semi-Fredholm** et le **spectre essentiel de Fredholm** (sur cette remarque, on pourra consulter par exemple le livre de Pietro Aiena "Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers," Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004).

Perturbations semi-Fredholm et Fredholm et opérateurs de Riesz

- Soit $F \in \mathcal{L}(X)$.
  - On dit que F est une **perturbation de Fredholm** si $U + F \in \Phi(X)$ pour tout $U \in \Phi(X)$.
  - F est dite une **perturbation semi-Fredholm supérieure** (resp. **une perturbation semi-Fredholm inférieure**) si $F + U \in \Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$) pour tout $U \in \Phi_+(X)$(resp. $\Phi_-(X)$).
- **Les ensembles des perturbations de Fredholm, perturbations semi-Fredholm supérieures (inférieures)** sont notés par $\mathcal{F}(X), \mathcal{F}_+(X), \mathcal{F}_-(X)$.

Il est bien connu que ces ensembles sont des idéaux bilatères fermés de $\mathcal{L}(X)$ (sur ce sujet, on peut par exemple citer le livre M. Schechter "Principles of Functional Analysis," Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 36, Amer. Math. Soc, 2001).

Proposition 2

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie et soit $F \in \mathcal{F}(X)$, alors $ind(A+F) = ind(A)$ pour tout $A \in \Phi(X)$.

Remarque 2

- Un opérateur $R \in \mathcal{L}(X)$ est dit de Riesz si $\sigma_e(R) = \{0\}$.
- Soient $\mathcal{R}(X), \mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{CS}(X)$ respectivement les classes des opérateurs de Riesz, strictement singuliers et strictement cosinguliers sur X et on a les inclusions suivantes:

  $$\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{F}_+(X) \subseteq \mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{R}(X)$$

  et

  $$\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CS}(X) \subseteq \mathcal{F}_-(X) \subseteq \mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{R}(X).$$

  L'inclusion $\mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{F}_+(X)$ est due à T. Kato (1958) tandis que le fait que $\mathcal{CS}(X) \subseteq \mathcal{F}_-(X)$ a été prouvée par Vladimirskii (1967).
- On note que les opérateurs de Riesz satisfont la théorie de Riesz-Schauder mais $\mathcal{R}(X)$ n'est en général pas un idéal de $\mathcal{L}(X)$ (on peut trouver un contre exemple dans le livre de S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger and B. Yood, "Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces", 1974).

Bases inconditionnelles et constantes basiques

- Soit $\{x_n\}_n$ une suite de vecteurs d'un espace de Banach X de dimension infinie.

  - La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\pi(n)}$ converge pour toute permutation π de $\mathbb{N}$ est dite **convergente inconditionnellement**.

  - Une base $\{x_n\}_n$ d'un espace de Banach X est dite **inconditionnelle** si pour tout $x \in X$, sa série en termes de cette base $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge inconditionnellement.

  - **La constante basique** de la base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est définie comme étant le plus petit nombre $K > 0$ tel que pour tout choix de scalaires $\{a_n\}_n$ et pour tous entiers positifs $m < n$, on a

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|.$$

- Si $\{x_n\}_n$ est une suite basique inconditionnelle de constante basique K. Alors, pour tout choix de scalaires $\{a_n\}_n$ tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge et pour tout choix de suite de scalaires bornée $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, on a

$$\|\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n x_n\| \leq 2K \sup_n |\lambda_n| \; \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n\|.$$

Pour plus de détails sur les propriétés des bases inconditionnelles et leurs propriétés, on pourra se référer au livre de Lindenstrauss et Tzafriri (classical Banach spaces, Springer-Verlag, 1977).

Problème de Salinas et décomposition de West

Définition 1

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie et soit $A \in \mathcal{L}(X)$. On dit que l'opérateur A satisfait le **problème de Salinas** s'il existe un opérateur compact $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\sigma(A+K) = \sigma_w(A)$.

Remarque 3

- le problème de Salinas est satisfait pour tout opérateur linéaire borné sur X, alors les opérateurs de Riesz ont la fameuse décomposition de West (T. West 1966), en d'autres termes, chaque opérateur de Riesz R peut être écrit sous la forme $R = K + Q$ où K est un opérateur compact et Q est quasinilpotent ($\sigma(Q) = \{0\}$).
- le problème de la décomposition de West ou celui de Salinas est toujours ouvert dans le cas des espaces de Banach quelconques, mais il a été réduit dernièrement seulement au cas des espaces de Banach ayant un type de Rademacher 1.

Exemples 1

Voici quelques espaces sur lesquels le problème de Salinas ou celui de la décomposition de West sont satisfaits.

1. **Les espaces de Hilbert** (T. West (1966) et C. Apostol (1976));
2. $l_p(1 \leq p < \infty) \bigcup c_0$ (K. Davidson et D. Herrero (1986));
3. $L_p([0,1])(1 < p < \infty)$ (H. Zhong (1988));
4. **L'espace de Tsirelson** (H. Zhong 1995).

Décomposablité des espaces de Banach

Définition 2

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie. X est dit

- **Décomposable** s'il s'écrit sous la forme d'une somme directe topologique de deux sous-espaces fermés de dimensions infinies.
- **Héréditairement indécomposable (en abrégé H.I)** s'il ne contient aucun sous-espace fermé décomposable.
- **Quotient héréditairement indécomposable (en abrégé Q.H.I)** si les quotients (de dimensions infinies) par des sous-espaces fermés de X ne sont pas décomposables.
- **Héréditairement finiment décomposable** si le nombre maximal de sous-espaces fermés de dimensions infinies de X formant unesomme directe de X est fini. Pour $n \geq 1$, on dit que X est un espace HD_n si ce nombre est égal à n.
- **n-quotient décomposable** et on écrit $X \in QD_n$, si n est le nombre maximal d'entiers positifs k tel que X possède un quotient qui s'écrit sous la somme directe de k sous-espaces fermés de dimensions infinies.

Proposition 3

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie, alors

- Si X est un **espace de Banach H.I**, alors $\mathcal{L}(X) = \mathbb{C}I \oplus \mathcal{S}(X)$;
- Si X est un **espace de Banach Q.H.I**, alors $\mathcal{L}(X) = \mathbb{C}I \oplus \mathcal{CS}(X)$.

Surjection ou non des applications spectre et spectres essentiels

On note par $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ la famille des parties compactes non-vides de $\mathbb{C}$.

Théorème 1

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie ayant une base inconditionnelle, alors l'application $\sigma : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est **surjective**.

Preuve: Soit $D \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$ et soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une base inconditionnelle de X. Soit $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dense dans D. On définit T comme suit:

$T(x) = T(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n x_n$, alors

$\|T(x)\| \leq 2K \sup_n |\lambda_n| \| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \| = M\|x\|$ (où $M = 2K \sup_n |\lambda_n|$). Il est clair que T est un opérateur linéaire borné sur X et $\sigma(T)$ contient D (car $\{\lambda_n\}_n \subseteq \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$). Maintenant, il suffit juste de prouver l'inclusion inverse, si $\lambda \notin D$, alors $\inf\{|\lambda - \beta|; \beta \in D\} > 0$ et donc

$S(x) = S(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} a_n x_n$ est un opérateur linéaire borné sur X et $(\lambda I - T)S = S(\lambda I - T) = I$, ceci montre que $\lambda \notin \sigma(T)$ et complète la preuve $\square$.

Théorème 2

Soit X un espace de Banach ayant une base inconditionnelle, alors les applications $\sigma_e : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, $\sigma_w : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ sont aussi **surjectives**.

Preuve: Dans ce cas, si C est un ensemble compact non-vide de $\mathbb{C}$, Soit $\{\lambda_n\}_1^\infty$ un ensemble dense dans C et on choisit l'opérateur T comme dans le théorème précédent avec simplement chaque λ_i de multiplicicité infinie $\square$.

Corollaire 1

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, alors les applications $\sigma : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$, $\sigma_e : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$, $\sigma_w : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ sont **surjectives** .

Théorème 3

Soit X un espace de Banach ayant un sous-espace fermé complémentable à base inconditionnelle, alors les applications $\sigma : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, $\sigma_e : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ sont **surjectives**.

Preuve: On a $X = X_1 \bigoplus X_2$ où X_1 est à base inconditionnelle et chaque opérateur linéaire borné T sur X s'écrit sous la forme $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ où $T_1 \in \mathcal{L}(X_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(X_2)$ et par suite $\sigma(T) = \sigma(T_1) \bigcup \sigma(T_2)$ et $\sigma_e(T) = \sigma_e(T_1) \bigcup \sigma_e(T_2) \Box$.

Corollaire 2

Si $X = L_1([0,1])$ ou $C([0,1])$ alors les applications $\sigma : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, $\sigma_e : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ sont **surjectives**.

Remarque 4

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie. Il est facile d'observer que si l'application $\sigma_w : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est surjective et si le problème de Salinas est satisfait pour chaque opérateur linéaire borné sur X, alors l'application $\sigma : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est **surjective**.

Proposition 4

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X ne contient le bord d'aucun ouvert non vide du plan complexe, alors les applications $\sigma, \sigma_e, \sigma_w : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ **ne sont pas surjectives**.

Idée de la preuve: On montre que les images de toutes ces applications sont incluses dans la famille des sous-ensembles compacts non-vides d'intérieurs vides $\square$.

Remarque 5

Les espaces de Banach $H.I$, $Q.H.I$, HD_n et QD_n représentent un bon contexte pour la proposition 4. En effet, on montre que le spectre essentiel de Wolf pour chaque opérateur est un ensemble fini.

Proposition 5

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie indécomposable, alors l' application $\sigma_e : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ n'**est pas surjective**.

Preuve: En effet on montre que X est indécomposable si et seulement si le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné est un ensemble connexe (M. Gonzalez (2003))$\square$.

Exemple 2

Soit X l'espace de Banach Shift construit par T. Gowers et B. Maurey (Banach space with small Calkin algebra, Math. Annalen, 1996) alors l'application $\sigma_e : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ **n'est pas surjective**.

Ensembles polynomialement convexes et ensembles de levage

Définition 3

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie et soit $\Omega \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$. On dit que Ω est un **ensemble de levage** pour X si pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\sigma_e(A) = \Omega$, alors il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ satisfaisant $\sigma(A + K) = \Omega$.

Théorème 4

Soit X un espace de Banach complexe de dimension infinie tel que pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$, A satisfait le problème de Salinas, alors Ω est un ensemble de levage si et seulement si $\sigma_e(A) = \sigma_w(A)$ pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\sigma_e(A) = \Omega$.

Preuve: On suppose que Ω est un ensemble de levage et $A \in \mathcal{L}(X)$ pour lequel $\sigma_e(A) = \Omega$, alors il existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $\sigma_e(A) = \sigma(A + K) = \Omega$. Comme $\sigma_e(A) \subseteq \sigma_w(A) = \sigma_w(A + K) \subseteq \sigma(A + K) = \Omega = \sigma_e(A)$, on obtient que $\sigma_e(A) = \sigma_w(A)$. Inversement, soit $\Omega \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$ tel que $\sigma_e(A) = \sigma_w(A)$ pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ satisfaisant $\sigma_e(A) = \Omega$. Le fait que A satisfait le problème de Salinas implique l'existence de $K \in \mathcal{K}(X)$ avec $\sigma(A + K) = \sigma_w(A) = \sigma_e(A) = \Omega$ et par suite Ω est un ensemble de levage $\square$.

Définition 4

- Soit $K \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble compact non-vide du plan complexe. **L'enveloppe polynomiallement convexe** de K et noté par $\widehat{K}$, et est définie par

$$\widehat{K} = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq \max_{\xi \in K} |P(\xi)| \text{ pour tout polynôme P}\}.$$

- Un ensemble compact K est dit **polynomiallement convexe** si $K = \widehat{K}$.
- Si $K \subsetneq \widehat{K}$, une composante connexe de $\widehat{K} \backslash K$ (considéré comme un espace topologique) est dite **un trou** de K.

Proposition 6

Si X est l'un des espaces de Banach suivants:

1. Espaces de Hilbert séparables;
2. Espaces $l_p(1 \leq p < \infty) \bigcup c_0$;

Alors Ω est un ensemble de levage pour X si et seulement si Ω est polynomiallement convexe.

Preuve: Le résultat se déduit en combinant les 3 faits suivants:

- Le problème de Salinas est satisfait pour chaque opérateur linéaire borné sur chacun de ces espaces de Banach.
- Le théorème 4.
- On a toujours $\sigma_w(A) \subseteq \widehat{\sigma_e(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$ $\square$.

Proposition 7

Soit X un **espace de Banach H.I**, alors

1. Si X est l'espace de **Banach d'Argyros-Haydon** (Acta Mathematica, 2011), alors les ensembles de levage sont les singletons $\{\lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$;
2. Les ensembles de levage sont les ensembles $\{\lambda\}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ si et seulement si les **opérateurs strictement singuliers** sur cet espace satisfont la décomposition de West.

1. **Question 1:** **Existe t-il des espaces de Banach X pour lequels l'une des applications $\sigma, \sigma_e, \sigma_w : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est surjective mais l'autre ne possède pas cette propriété?**

2. **Question 2:** **Le problème de Salinas est-il vrai sur chaque espace de Banach ayant une base inconditionnelle? Signalons encore que le problème est toujours ouvert dans le cas d'un espace de Banach quelconque.**

3. **Question 3:** **Les opérateurs de Riesz admettent-ils la décomposition de West sur l'espace $L_1([0,1])$?**

4. **Question 4:** **Soit X un espace de Banach lattice et soient $F_1, F_2 \in \mathcal{L}(X)$ avec $F_1, F_2 \geq 0$ et $F_1 \leq F_2$, si $F_2 \in \mathcal{F}(X)$, a t-on $F_1 \in \mathcal{F}(X)$?**

Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis,
An Invitation to Operator Theory, Vol. 50, Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2002.

P. Aiena,
Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

C. Apostol,
The correction by compact perturbation of the singular behavior of operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 21 (1976), 155-175.

S. Argyros and R. Haydon,
A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem, Acta. Math., 206 (2011), 1-54.

S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger and B. Yood,
Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces,
Marcel Dekker, New York, 1974.

K.R. Davidson and D. Herrero,
Decomposition of Banach spaces operators, Indiana. Univ. Math. J., 35 (1986), 333-343.

I.C. Gohberg, A. Markus and I.A. Feldman,
Normally solvable operators and ideals associated with them, Amer. Math. Soc. Tran. Ser. 2., 61 (1967), 63-84.

M. Gonzalez,
Banach spaces with small Calkin algebra, Banach Center Publ., 75 (2007), 159-170.

T.W. Gowers and B. Maurey,
Banach spaces with small spaces of operators, Math. Ann., 307 (1997), 543-568.

T.W. Gowers,
An infinite Ramsey theorem and some Banach space dichotomies, Annals of Mathematics., 156 (2002), 797-833.

T. Kato,
Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Anal. Math., 6 (1958), 261-322.

J. Lindenstrauss and L. Tzafriri,
Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, 1977.

V. Müller,
Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebra, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

G.J. Murphy,
Lifting sets and the Calkin algebra, Glasgow. Math. J., 23 (1982), 83-84.

M. Schechter,
Principles of Functional Analysis, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 36, Amer. Math. Soc, 2001.

W.G. Su and H.J. Zhong,
The generalized West decomposition of operators and other compact perturbation problem, Acta. Math. Sinica., 22 (2006), 515-522.

B.S. Tsirelson,
Not every Banach space contain an embedding of l_p or c_0, Funct. Anal. Appl., 8 (1974), 138-141.

J.I. Vladimirskii,
Strictly cosingular operators, Sov. Math. Dokl., 8 (1967), 739-740.

Merci pour votre attention