REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

No d'ordre : ....

No série : ....

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Quelques résultats de points fixes et applications

Option

Analyse Fonctionnelle

Par :

REDJEL NAJEH

Devant le jury :

Président :	M. DENECHE	Prof	Univ. Constantine 1
Rapporteur :	A. DEHICI	Prof	Univ. Souk-Ahras
Examinateurs :	E. KARAPINAR	Prof	Univ. Atilim (Turquie)
	M. L. MARHOUNE	Prof	Univ. Constantine 1
	S. DJEZZAR	Prof	Univ. Constantine 1
	B. BELAIDI	Prof	Univ. Mostaganem

19/05/2016

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadreur monsieur Dehici Abdelkader, professeur de mathématiques à l'universsité de Souk-Ahras qui a suivi avec un grand intérêt la direction de cette thèse, sa disponibilité en n'importe quel moment, a été un facteur important qui a permis de développer beaucoup d'idées de ce travail.

Je remercie également monsieur Mohamed Denche, professeur à l'université de Constantine 1 d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse malgré ces multiples occupations pédagogiques et scientifiques.

Ma profonde considération va aux professeurs A. L. Marhoune et S. Djezzar de l'université de Constantine 1, B. Benharrat, professeur à l'univerisité de Mostaganem qui m'ont honoré en faisant partie de ce jury.

Monsieur le professeur E. Karapinar m'a fait un très grand plaisir en acceptant de faire un rapport sur ce travail, son dynamisme, sa mobilité, ses diverses collaborations et son acharnement au travail ont été un atout majeur dans ce travail, sans oublier sa sympathie et son hospitalité qui m'a été réservée durant mon stage scientifique à l'université d'Atilim en Turquie au début de l'année 2015.

Je ne peux pas oublier Inci Erhan, professeur à l'université d'Atilim en Turquie pour son sens de professionnalisme et sa très grande gentillesse ainsi que le personnel de la post-graduation du département de Mathématiques de l'université de Constantine 1 pour l'aide que je trouve à chaque fois auprès d'eux, dans mes démarches administratives.

Table des matières

Introduction **6**

1 Rappels **11**

1.1 Fonctions de comparaison et de c-comparaison 11

1.2 Quelques théorèmes de points fixes métriques 12

1.2.1 Cas continu 12

1.2.2 Cas non-continu 19

1.3 Points fixes et géométrie des espaces de Banach 27

1.4 Mesures de non compacité et opérateurs condensants 32

1.4.1 Mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff 32

1.4.2 Notion générale sur les mesures de non compacité 34

1.4.3 Mesure de non compacité faible de De Blasi 35

1.4.4 Opérateurs condensants 37

1.5 Quelques processus itératifs 39

1.5.1 Certains processus itératifs 40

1.5.2 Classe des applications φ-quasi-non expansives 41

1.5.3 Convergence et stabilité 42

2 Sur quelques extensions du principe de contraction de Banach et applications à la convergence et à la stabilité de quelques processus itératifs **45**

2.1 Résumé 45

2.2 Introduction 45

2.3 Résulats principaux 46

2.4 Applications : Convergence et stabilité de certains processus itératifs 55

3 Sur quelques points fixes des contractions généralisées avec des expressions rationnelles et applications 57

3.1 Résumé 57

3.2 Introduction et Notations 57

3.3 Résultats principaux 59

3.4 Applications 63

4 Théorèmes de points fixes pour les applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan 66

4.1 Résumé 66

4.2 Introduction et préliminaires 66

4.3 Résultats principaux 67

4.4 Conséquences 74

5 Théorème de point fixe pour la contraction de type Meir-Keeler via l'expression de Gupta-Saxena 77

5.1 Résumé 77

5.2 Introduction 77

5.3 Résultats principaux 78

5.4 Applications 84

6 Sur quelques points fixes des applications $\alpha - \psi$ contractives généralisées avec des expressions rationnelles 87

6.1 Résumé 87

6.2 Introduction et préliminaires 87

6.3 Résultats principaux 88

6.4 Applications 95

6.5 Conséquences immédiates 96

6.6 Cas des applications cycliques 99

7 Quelques résultats de points fixes et application à la convergence de certains processus itératifs dans les espaces normés 104

7.1 Résumé 104

7.2 Introduction et notations 104
7.3 Résultats principaux 106
7.4 Applications 114

8 Mesures de non compacité et application aux équations différentielles stochastiques 120

8.1 Résumé 120
8.2 Introduction et notations 120
8.3 Résultats principaux 125
8.4 Application à la convergence du processus itératif de Kirk 136

9 Propriétés spectrales des équations de transport et résolution d'un problème non-linéaire 138

9.1 Résumé 138
9.2 Introduction et notations 138
9.3 Résultats principaux 146
9.3.1 Résultats de compacité et p-indépendence de $\sigma_s(A_H)$. 146
9.3.2 Problème de transport non linéaire en géométrie plane 153

Bibliographie 154

Introduction

Soit X un ensemble non vide et u un point de X. On se donne $T : X \longrightarrow X$ une application. On dit que u est un point fixe de T si $T(u) = u$, en d'autres termes, l'action de l'application T sur le point u le laisse invariant.

Le premier résultat célèbre dans ce contexte est le théorème du point fixe de Brouwer (1912) affirmant que toute application continue T qui envoie un ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ dans lui même admet un point fixe. Ce résultat a été démontré séparément par J. Hadamard et L. E. J. Brouwer. Signalons aussi qu'en 1886, H. Poincaré a démontré un résultat équivalent au théorème du point fixe de Brouwer. Ce dernier est connu plus en topologie qu'en analyse.

Une extension de ce résultat au cas des ensembles compacts et convexes des espaces de Banach de dimensions infinies a été réalisée par J. Schauder (1930). Cette généralisation est connue sous le nom du théorème du point fixe de Schauder.

Ce théorème ainsi que ses versions et extensions ont eu une grande notoriété notamment en économie, qui revient à son utilisation pour résoudre des problèmes d'équilibre dans les marchés financiers (voir[24, 51, 100, 114]).

En 1922, S. Banach a établi le théorème du point fixe qui porte son nom ou connu sous le nom du principe de contraction de Banach qui est un outil important en théorie des espaces métriques et en analyse en général, il gurantit l'existence et l'unicité de points fixes pour certaines applications qui diminuent les distances et donne une méthode constructive pour trouver ces points fixes.

Définition 0.0.1. Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \longrightarrow X$ est dite une contraction sur X s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que

$$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y), \tag{I}$$

pour tous $x, y \in X$.

Avec les mêmes notations ci-dessus. T est dite non expansive si

$$d(T(x),T(y)) \leq d(x,y). \tag{II}$$

L'énoncé du théorème du point fixe de Banach est donné comme suit :

Théorème du point fixe de Banach : Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une contraction. Alors T admet un point fixe unique u dans X, c'est à dire $T(u) = u$. De plus, pour tout élément arbitraire $x_0 \in X$, la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ définie par $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$ converge vers u dans (X, d).

On signale qu'en (2007), une preuve simple et très fine de ce résultat a été donnée par R. Palais ([120]).

Le résultat du point fixe d'Edelstein (1969) [46] a été établi moyennant la compacité de l'espace métrique (X, d) et où l'application T satisfait la contraction stricte suivante :

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y) \tag{III}$$

pour tous $x, y \in X, x \neq y$.

Notons que la compacité est cruciale dans ce résultat comme le montre l'exemple suivant :

$X = [1, +\infty[, d(x, y) = |x-y|$ et $T : [1, +\infty[\longmapsto [1, +\infty[$ donné par $T(x) = x + \dfrac{1}{x}$ qui n'admet aucun point fixe dans X.

D'autre part, il est facile d'observer que l'avantage des applications contractantes, non expansives ou ceux indiquées dans le résultat d'Edelstein, sont des applications continues ce qui fait tourner pas mal de choses dans les résultats d'existence de points fixes. Mais il se peut que des applications non-continues admettent des points fixes comme le montre l'exemple suivant :

$X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x est rationnel}\,; \\ 1 & \text{si x est irrationnel.} \end{cases}$$

T admet un point fixe qui est $u = 0$.

En 1965, les résultats de W. A. Kirk et F. E. Browder ont révolutionné la théorie, en impliquant la géométrie de l'espace normé dans l'étude de l'existence de points fixes pour les applications non expansives qui est parmi les cas les plus délicats et les plus intéréssants, la question qui lui est associée est connu sous le nom de la propriété $(f.p.p)$ (fixed point property) énoncée comme suit :

Question : Soit X un espace de Banach, K un ensemble non vide borné, fermé et convexe de X et $T : K \longrightarrow K$ une application non expansive, T admet-elle ou non un point fixe dans K? La réponse à cette question est en général fausse, en effet Alpash (1980) a donné l'exemple d'un ensemble borné, fermé et convexe de $L^1([0,1])$ et une isométrie $T : K \longmapsto K$ telle que $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|, \forall x, y \in K$ n'admettant aucun point fixe dans K. (Pour plus de détails sur ce fascinant sujet voir, chapitre Rappels, on peut consulter aussi par exemple ([7]).

En applications, la théorie du point fixe s'avère un outil indispensable pour la résolution de beaucoup de problèmes en analyse nonlinéaire (résolution des E.D.O, équation de Schrodinger nonlinéaire, équations intégrales, calcul différentiel (théorème de l'inversion locale), problèmes de contrôlabilté,......).

Le sujet de cette thèse va dans ce sens, plus précisément, on va établir quelques résultats d'existence et d'unicité de points fixes avec diverses applications. L'organisation de la thèse est réalisée comme suit :

Le chapitre 1 est un chapitre "Rappels" dans lequel on donne les définitions et les notions de base qui seront utilisées par la suite, complétées par quelques théorèmes classiques sur la thématique avec des exemples.

Dans le chapitre 2, on établit un théorème d'existence et d'unicité de points fixes pour une large classe d'applications (continues) satisfaisant une condition de (Φ_1, Φ_2) contraction, permettant d'étendre beaucoup de résultats connus dans la littérature à l'exemple du principe de contraction de Banach (1922) [13], une version du théorème de Boyd-Wong (1969) [26], S.

Jaggi (1976) [65], Olatinwo et al (2008) [115, 116]. D'autres théorèmes qui lui sont associés faisant intervenir des polynômes d'applications (non linéaires) sont établis. Ces résultats théoriques ont été ensuite appliqués dans le but d'étudier la convergence et la stabilité de certains processus itératifs pour cette classe d'applications.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de points fixes pour une classe d'applications satisfaisant une contraction généralisée de type rationnel permettant d'étendre le résultat de M. S. Khan (1976) [77], ici les 2 cas (continu et non continu) sont considérés. La convergence des processus de Mann et Ishikawa pour ce type d'applications a été étudiée, celle de Picard ainsi que sa stabilité ont été aussi établies.

Dans le chapitre 4, on introduit la classe d'applications de type Meir-Keeler-Khan provenant de la condition de Meir-Keeler (1969) [103] pour des applications α-admissibles de type Khan. Des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus (cas continu et non continu). Aussi, en s'appuyant sur les contributions de V. Popa et M. Mocanu (2009) [125] et celles de B. Samet, C. Vetro et H. Yazidi (2013) [143], d'autres faisant intervenir des conditions de type intégrales se sont déduits.

Dans le chapitre 5, on focalise notre étude sur l'extension d'un résultat concernant le théorème du point fixe de Gupta-Saxena (1984) [57], ici l'hypothèse de continuité imposée sur les applications est cruciale. Quelques unes d'entre elles faisant intervenir des contractions de type intégrales ont été obtenues. Ce travail est inspiré de celui de B. Samet et al (J. Nonlinear analysis and applications, 2013, 6 : 162-169) généralisant le théorème du point fixe de Dass-Gupta (1975) [39].

Moyennant la notion des applications $\alpha - \psi$ contractives, dans le chapitre 6, on étudie l'existence et l'unicité de points fixes pour certains types de ces applications faisant intervenir des expressions rationnelles (singulières et non singulières). Ici les deux cas (continu et non continu) sont considérés. D'autre part, en utilisant la notion de contraction cyclique, d'autres résultats ont été dérivés. On note ici que ce chapitre a permis d'étendre beaucoup de résultats bien connus dans la littérature à l'instar des résultats de points fixes de Banach (1922) [13], Dass-Gupta (1975) [39], Jaggi (1977) [65], Hardy-Rogers (1973) [61], Gupta-Saxena

(1984)[57], Pacurar-Rus (2010) [119], Karapinar-Samet (2012) [71] et bien d'autres.

Dans le chapitre 7, on étudie une extension d'un résultat d'existence et d'unicité de point fixe dû à B. Ray et P. Sing (1977) dans le cas des espaces réflexifs ayant des des structures normales mettant le cas hilbertient comme cas particulier. En outre, les résultats théoriques vont être utilisés dans le but d'étudier la convergence et la stabilité de certain processus itératifs.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude d'une équation différentielle stochastique modélisant par exemple le mouvement d'une particule soumise à une infinité de chocs en un temps t. Cette équation s'écrit sous la somme d'une équation différentielle ordinaire et d'une intégrale d'Ito stochastique (modélisant le mouvement Brownien). L'idée ici est de transformer le problème de l'existence et l'unicité de la solution (qui est dans ce cas un processus stochastique) à un problème de point fixe de l'application aléatoire associée C. L'existence a été établie moyennant la notion de la mesure de non compacité, quant à l'unicité, sa démonstration est très technique. Ce travail est inspiré de celui de A. Rodkina (Ukrainian Mathematical Journal, 1985). On s'intéresse dans ce chapitre en particulier au cas où C est une application non expansive (qui est le cas le plus délicat en théorie du point fixe). En outre la convergence du processus de Kirk associée à l'application C converge vers la solution de cette EDS pour des temps suffisamment petits si C satisfait la propriété métrique de Diaz-Metcalf (1969) [42].

Et finalement dans le chapitre 9, on s'attaque à une équation de transport (qui est une équation hyperbolique) via les propriétés spectrales de l'opérateur de transport associé sur les espaces L_p . Tout d'abord, on arrive à montrer l'indépendance du spectre asymptotique de l'opérateur de transport linéaire de p, c'est-à-dire qu'il suffit de travailler sur l'espace L_1. En outre, sur cet espace, on établit l'existence de la solution d'une équation de transport mono-dimensionnelle monoénergétique non linéaire via la mesure de non compacité faible sur l'espace L_1.

Chapitre 1

Rappels

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats classiques et fondamentaux sur la théorie de point fixe qui seront utiles dans la suite.

1.1 Fonctions de comparaison et de c-comparaison

Définition 1.1.1. Une fonction $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est appelée une fonction de comparaison si elle satisfait les conditions suivantes :

$(\imath)$ φ croissante ;

$(\imath\imath)$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varphi^n(t) = 0$; pour tout $t > 0$ (φ^n est la nième itération de φ).

Remarque 1.1.1. Chaque fonction de comparaison satisfait $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) < t$, pour tout $t > 0$.

Définition 1.1.2. Une fonction $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est appelée une fonction de c-comparaison si elle satisfait les conditions suivantes : ;

$(\imath)$ φ croissante ;

$(\imath\imath)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$ pour tout $t > 0$.

Dans tout ce mémoire, on désigne par $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) la classe des fonctions de comparaison (resp. c-comparaison) sur $[0, +\infty[$. Il est facile d'observer que $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ mais l'inverse n'est toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

***Exemple* 1.1.1.** Soit $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t}{t+1}$. Alors φ est une fonction de comparaison mais pas une fonction de c-comparison car $\varphi^n(t) = \dfrac{t}{nt+1}$ pour $t \geq 0$.

1.2 Quelques théorèmes de points fixes métriques

1.2.1 Cas continu

De nombreuses variantes du principe de contraction de Banach et des résultats de ces extensions ont été établis par plusieurs auteurs, entre autre Boyd-Wong, Meir-Keeler, S. Jaggi et autres. Le but de ce paragraphe est de les rappeler.

Extention de Boyd-Wong

Cette extension consiste à remplacer la contraction par la $\varphi-$contraction dont nous donnons la définition.

Définition 1.2.1. Soient (X,d) un espace métrique et T une application de X dans lui même. On dit que T est une $\varphi-$contraction, s'il existe une fonction de comparaison φ telle que :

$$\forall x,y \in X, d(T(x),T(y)) \leq \varphi(d(x,y)). \tag{BW}$$

Remarque 1.2.1. Il est clair que toute contraction est une $\varphi-$contration si $\varphi\left(t\right) = \alpha t,\ 0 < \alpha < 1$.

***Théorème* 1.2.1.** (Boyd-Wong 1969) [26]
Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application $\varphi-$contraction. Alors T a un point fixe unique $u \in X$ et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} T^n(x) = u \ \text{ pour tout } x \in\ X.$$

Preuve

Existence :

On suppose que $t \leq \varphi(t)$ pour tout $t > 0$. Alors la croissance de φ donne :

$$\varphi(t) \leq \varphi(\varphi(t))$$

et donc

$$t \leq \varphi^2(t).$$

Par induction , on obtient

$$t \leq \varphi^n(t) \;\text{ pour }\; n \in \{1, 2, ...\}.$$

C'est une contradiction . Ainsi $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$. En outre,

$$d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \leq \varphi^n(d(x, T(x))) \text{ pour } x \in X,$$

et donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in X.$$

Soit $\epsilon > 0$ et on choisit δ tel que $\delta(\epsilon) = \epsilon - \varphi(\epsilon)$. Si $d(x, T(x)) < \delta(\epsilon)$, alors pour tout $z \in B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$, on a

$$\begin{aligned} d(T(z), x) &\leq d(T(z), T(x)) + d(T(x), x) \\ &\leq \varphi(d(z, x)) + d(T(x), x) \\ &< \varphi(d(z, x)) + \delta(\epsilon) < \varphi(\epsilon) + (\epsilon - \varphi(\epsilon)) \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $T(z) \in B(x, \epsilon)$ et le résultat découle du Théorème 1.5 de [2].

Unicité :

Si v est un autre point fixe de T, alors

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T(u), T(v)) \\ &\leq \varphi(d(u, v)) \\ &< d(u, v), \end{aligned}$$

ce qui est impossible et donc $u = v$. □

Extension de Meir-Keeler

Ce théorème paru en 1969 prolonge le résultat de Boyd-Wong. Il est considéré parmi les plus jolis résultats en théorie du point fixe, il généralise le principe de contraction de Banach. Cette extension consiste à remplacer la contraction par la contraction stricte uniformément faible dont nous donnons la définition.

Définition 1.2.2. Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \longrightarrow X$ une application. On dit que T est une contraction stricte uniformément faible si
$\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon. \tag{MK}$$

Remarque 1.2.2. La condition de Meir-Keeler (MK) entraîne directement la contraction stricte.

Et nous avons le résultat suivant.

***Théorème* 1.2.2.** (Meir-Keeler 1969 [103]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition (MK). Alors T admet un point fixe unique u dans X. De plus, pour tout $x \in X$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} T^n(x) = u.$$

Preuve
La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants :

***Lemme* 1.2.1.** Soient (X, d) un espace métrique complet, $T : X \longrightarrow X$ une contraction stricte et pour tout $x \in X, T^n(x)$ est une suite de Cauchy, alors T admet un point fixe unique.

Preuve du lemme 1.2.1.
Comme X est complet, alors la suite de Cauchy $T^n(x)$ admet une limite $u \in X$. La continuité de T donne

$$T(u) = T(\lim_{n \longrightarrow +\infty} T^n(x)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} T^{n+1}(x) = u.$$

Ce qui montre que u est un point fixe de T.$\square$

***Lemme* 1.2.2.** La condition de Meir-Keeler (MK) implique que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) \searrow 0.$$

Preuve du lemme 1.2.2.

Soit $C_n = d(x_n, x_{n+1})$. La stricte contraction de T assure que C_n est décroissante. Si $C_n \searrow \epsilon > 0$, alors la condition de Meir-Keeler (MK) ne peut pas être satisfaite pour C_{n+1} où C_n est choisi tel que $C_n < \epsilon + \delta$.□

Donc, notre théorème sera établi si la condition (MK) implique que chaque suite $\{T^n(x)\} = \{x_n\}$ des itérées est une suite de Cauchy. Supposons qu'une certaine suite n'est pas de Cauchy. Alors il existe $2\epsilon > 0$ tel que $\limsup d(x_m, x_n) > 2\epsilon$. D'après l'hypothèse de Meir-Keeler, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\epsilon \leq d(x, y) < \epsilon + \delta \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon,$$

cette formule demeurera vraie avec δ remplacé par $\delta' = \min(\delta, \epsilon)$. Par le Lemme 1.2.2, nous pouvons trouver M de sorte que $C_M < \frac{\delta'}{3}$. Choisissons $m, n > M$ tels que $d(x_m, x_n) > 2\epsilon$. Pour $j \in [m, n]$, on a

$$|d(x_m, x_j) - d(x_m, x_{j+1})| \leq C_j < \frac{\delta'}{3},$$

comme $d(x_m, x_{m+1}) < \epsilon$ et $d(x_m, x_n) > \epsilon + \delta'$, ce qui implique qu'il existe $j \in [m, n]$ tel que

$$\epsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_j) < \epsilon + \delta'.$$

Cependant, pour tous m et j, il vient que

$$d(x_m, x_j) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{j+1}) + d(x_{j+1}, x_j).$$

Donc

$$d(x_m, x_j) \leq C_m + \epsilon + C_j < \frac{\delta'}{3} + \epsilon + \frac{\delta'}{3} = \frac{2\delta'}{3} + \epsilon.$$

Contradiction. Ceci prouve que x_n est une suite de Cauchy, et le théorème est établi. □

Extension de S. Jaggi

Le théorème de S. Jaggi fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe où l'application continue vérifie une inégalité qui contient une expression rationnelle singulière.

***Théorème* 1.2.3.** (S. Jaggi 1977) [65] Soient (X, d) un espace métrique complet, $T : X \longrightarrow X$ une application continue et $\alpha, \beta \in [0, 1[$ deux réels tels que $\alpha + \beta < 1$. Supposons que T satisfait la condition suivante :

$$d(T(x),T(y)) \leq \frac{\alpha d(x,T(x))d(y,T(y))}{d(x,y)} + \beta d(x,y) \tag{Ja}$$

pour tous $x, y \in X, x \neq y$. Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve

Soit x_0 un point arbitraire de X et soit la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ telle que $x_n = T^n(x_0)$. Il est clair que si $x_n = x_{n+1}$ pour un certain n, alors le résultat est immédiat. Soit $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la condition (Ja) pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n) &= d(T(x_n),T(x_{n-1})) \\
&\leq \frac{\alpha d(x_n,T(x_n))d(x_{n-1},T(x_{n-1}))}{d(x_n,x_{n-1})} + \beta d(x_n,x_{n-1}) \\
&\leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) d(x_n,x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n d(x_1,x_0).$$

Par l'inégalité triangulaire, pour $m \geq n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots\ldots + d(x_{m-1},x_m) \\
&\leq (k^n + k^{n+1} + \ldots\ldots + k^{m-1})d(x_0,T(x_0)),\ o\grave{u}\ k = \frac{\beta}{1-\alpha} \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0,T(x_0)) \\
&\longrightarrow 0\ si\ m,n \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} d(x_n,x_m) = 0$, ce qui prouve que la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme X est complet, alors il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = u$. De plus, la continuité de T dans X implique que :

$$\begin{aligned}
T(u) &= T(\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} T(x_n) \\
&= u.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que u est un point fixe de T dans X.

Maintenant, pour prouver l'unicité, on suppose qu'il existe un autre point $v \neq u$ dans X tel que $T(v) = v$, alors :

$$\begin{aligned} d(v,u) &= d(T(v),T(u)) \\ &\le \frac{\alpha d(v,T(v))d(u,T(u))}{d(v,u)} + \beta d(v,u) \\ &= \beta d(v,u) \\ &< d(v,u). \end{aligned}$$

Contradiction, par conséquent u est un point fixe unique de T dans X.$\square$

Il est important de noter que la condition de S. Jaggi est une condition nécessaire mais pas suffisante comme le montre l'exemple suivant

***Exemple* 1.2.1.** Soit $X = [0,1]$ muni de la métrique usuelle, et soit $T : X \longrightarrow X$ une application définie par :

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si } \ x \in [0, \dfrac{1}{2}[; \\ \dfrac{x}{5} & \text{si } \ x \in [\dfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Il est clair que pour $\alpha = \dfrac{3}{5}$ et $\beta = \dfrac{19}{50}$, la condition de S. Jaggi (Ja) est satisfaite et pourtant T n'est pas continue sur $[0,1]$ mais elle admet un point fixe unique à savoir $u = 0$.

Théorème de Gupta-Saxena

En combinant l'expression rationnelle de Jaggi avec celle de Gupta-Duss, les deux mathématiciens A. N. Gupta et A. Saxena ont montré un résultat qui garantit l'existence et l'unicité de points fixes pour les applications continues vérifiant de telles expressions.

***Théorème* 1.2.4.** (Gupta-Saxena 1984) [57] Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application continue satisfaisant la condition suivante :

$$d(T(x),T(y)) \le a\frac{[1 + d(x,T(x))]d(y,T(y))}{1 + d(x,y)} + b\frac{d(x,T(x))d(y,T(y))}{d(x,y)} + cd(x,y) \qquad (GS)$$

pour tous x, y $(x \neq y)$ dans $X, a, b, c \geq 0$ et $a+b+c < 1$. Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve

Existence

Soit x_0 un point quelconque de X. On considère la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ définie par $x_n = T^n(x_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $x_n = x_{n+1}$ pour un certain n, alors le résultat est immédiat. Soit $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la condition de (GS) pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq a\frac{[1 + d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))]d(x_n, T(x_n))}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} + b\frac{d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))d(x_n, T(x_n))}{d(x_{n-1}, x_n)} + \\ &cd(x_{n-1}, x_n) \\ &= a\frac{[1 + d(x_{n-1}, x_n)]d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} + b\frac{d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)} + cd(x_{n-1}, x_n) \\ &= ad(x_n, x_{n+1}) + bd(x_n, x_{n+1}) + cd(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

où encore

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq rd(x_{n-1}, x_n),$$

avec $r = \dfrac{c}{1 - a - b}$. Comme $a + b + c < 1$, alors

$$r < 1.$$

Par récurrence, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r^n d(x_0, x_1),$$

et donc, pour tout $m \geq n$, on a :

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{r^n}{1 - r} d(x_0, x_1).$$

Ainsi $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et donc elle converge vers un point qu'on le note $u \in X$.

On va montrer que u est un point fixe de T. Il suffit de vérifier que : $T(u) = u$. En effet, en utilisant la continuité de T, on obtient

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} T(x_n) \\ &= T(\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n) \\ &= T(u). \end{aligned}$$

Unicité

Supposons que $u, v \in X$ sont deux points fixes distincts de T, alors :

$$d(u,v) = d(T(u),T(v)) \leq a\frac{d[1+d(u,u)]d(v,v)}{1+d(u,v)} + b\frac{d(u,u)d(v,v)}{d(u,v)} + cd(u,v).$$

Donc

$$d(u,v) \leq cd(u,v).$$

Comme $d(u,v) \neq 0$, on doit avoir

$$c \geq 1,$$

ce qui contredit le fait que $c < 1$. D'ou $u = v$.$\square$

1.2.2 Cas non-continu

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques résultats qui garantissent l'existence et l'unicité de points fixes pour les applications non-continues, commençons par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème de point fixe de Kannan.

Théorème de Kannan

Il fût le premier résultat en littérature qui garantit l'existence et l'unicité de points fixes pour les applications non-continues.

***Théorème* 1.2.5.** (R. Kannan 1968) [68] Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $a \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in X$, on a :

$$d(T(x),T(y)) \leq a[d(x,T(x)) + d(y,T(y))]. \tag{Ka}$$

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve

Existence

Soit $x_0 \in X$, on définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $x_n = T(x_{n-1}), n = 1, 2, ...,$ en utilisant la condition (Ka), on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})], \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n).$$

Par récurrence sur n, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1).$$

On pose $r = \dfrac{a}{1-a}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + ... + r^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $a \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme X est complet, il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = u$. u est un point fixe de X car

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, T(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(u, T(u))], \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, T(u)) \leq \frac{1}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\epsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge vers u, il existe un entier naturel $N = N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N \geq 1 \Longrightarrow d(u, x_n) \leq \epsilon \frac{1-a}{1+a} \;\text{ et }\; d(x_{n-1}, x_n) \leq \epsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résulte que

$$d(u, T(u)) \leq \frac{\epsilon}{1+a} + \frac{\epsilon a}{1+a} = \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on déduit que $T(u) = u$.

Unicité

Si v est un autre point fixe de T, alors :

$$\begin{aligned} d(v,u) &\leq a[d(u,T(u)) + d(v,T(v))] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $v = u$, ce qui achève la preuve. □

***Exemple* 1.2.2.** Soit $X = \mathbb{R}$ et $f : X \longrightarrow X$ une application définie par :

$$T(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Alors :

1. T n'est pas continue,
2. T satisfait la condition (Ka) avec $a = \dfrac{1}{5}$ et par conséquent, d'après le théorème de Kannan, T admet un point fixe unique $u = 0$ dans X.

Théorème de Zamfirescu

Dans un espace métrique, il se peut qu'il ya des points de cet espace qui vérifient la condition de Banach (I), autres points celle de Kannan (Ka) et autres points la condition de Chatterjea. Est-ce-que dans ce cas l'application admet-elle un point fixe unique ? En 1972, Zamfirescu a répondu à cette question par le théorème suivant :

***Théorème* 1.2.6.** (T. Zamfirescu 1972) [162] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application. On suppose qu'il existe des nombres réels α, β et γ satisfont $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \dfrac{1}{2}$ et $0 \leq \gamma < \dfrac{1}{2}$, tels que, pour tous $x, y \in X$, au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée.

(Z_1) $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$;

(Z_2) $d(T(x), T(y)) \leq \beta[d(x, T(x)) + d(y, T(y))]$;

(Z_3) $d(T(x), T(y)) \leq \gamma[d(x, T(y)) + d(y, T(x))]$.

Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve On fixe d'abord $x, y \in X$. Si la condition (Z_2) est satisfaite, alors on a

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq \beta[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] \\ &\leq \beta\left(d(x, T(x)) + [d(y, x) + d(x, T(x)) + d(T(x), T(y))]\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$(1-\beta)d(T(x), T(y)) \leq 2\beta d(x, T(x)) + \beta d(x, y),$$

donc

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{2\beta}{1-\beta} d(x, T(x)) + \frac{\beta}{1-\beta} d(x, y).$$

Si la condition (Z_3) est vérifiée, alors similairement, on obtient

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma} d(x, T(x)) + \frac{\gamma}{1-\gamma} d(x, y).$$

On note par :

$$\delta = \max\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\},$$

donc on a $0 \leq \delta < 1$, il s'en suit que pour tous $x, y \in X$, l'inégalité suivante :

$$d(T(x), T(y)) \leq 2\delta d(x, T(x)) + \delta d(x, y)$$

est vérifiée. D'une façon similaire, on a

$$d(T(x), T(y)) \leq 2\delta d(x, T(y)) + \delta d(x, y),$$

pour tous $x, y \in X$.

On va prouver que T admet un point fixe unique. Soit $x_0 \in X$ un élément arbitraire et $\{x_n\}_{n\geq 0}$ tel que $x_n = T^n(x_0)$. Si $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$, alors la dernière inégalité donne :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \delta d(x_n, x_{n-1}).$$

De cela on déduit que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite $u \in X$ puisque X est complet. En particulier, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leq d(u, x_{n+1}) + d(T(x_n), T(u)) \\ &\leq d(u, x_{n+1}) + \delta d(u, x_n) + 2\delta d(x_n, T(x_n)). \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$d(u, T(u)) = 0 \Longleftrightarrow u = T(u).$$

Ce qui montre que u est un point fixe pour T. L'unicité est triviale. □

Théorème de Dass-Gupta

Ce résultat garantit l'existence et l'unicité du point fixe pour les applications non-continues vérifiant une inégalité dans laquelle intervient une expression rationnelle non singulière, c'est à dire que le dénominateur ne s'annule pas pour n'importe quel point de l'espace métrique.

***Théorème* 1.2.7.** (Dass-Gupta 1975) [39] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante :

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha \frac{d(y, T(y))[1 + d(x, T(x))]}{1 + d(x, y)} + \beta d(x, y) \qquad (DG)$$

pour tous x, y dans $X, \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$. Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve

Existence

Soit x_0 un élément arbitraire de X. On définit la suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ par $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$ pour tout $n = 1, 2, ...$

En utilisant la condition de Dass-Gupta, on a

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \\ &\leq \alpha \frac{d(x_1, T(x_1))[1 + d(x_0, T(x_0))]}{1 + d(x_0, x_1)} + \beta d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\beta}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Une récurrence sur n permet de conclure que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^n d(x_0, x_1).$$

Et donc pour $m \geq n$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + ... + r^{m-1}) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $r = \dfrac{\beta}{1-\alpha} < 1$, il en résulte que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui montre que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et comme X est complet, il existe $u \in X$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = u.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, T(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + \alpha \frac{d(u, T(u))[1 + d(x_{n-1}, x_n)]}{1 + d(x_{n-1}, u)} + \beta d(x_{n-1}, u). \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$d(u, T(u)) \leq \alpha d(u, T(u)),$$

où encore

$$(1-\alpha) d(u, T(u)) \leq 0.$$

Comme $\alpha < 1$, on en déduit que

$$d(u, T(u)) = 0,$$

ce qui donne $u = T(u)$.

Unicité

Si v est un autre point fixe de T, alors :

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T(u), T(v)) \\ &\leq \alpha \frac{d(v, v)[1 + d(u, u)]}{1 + d(u, v)} + \beta d(u, v) \\ &\leq \beta d(u, v). \end{aligned}$$

Comme $d(u, v) \neq 0$. On voit que $\beta \geq 1$. Ce qui contredit le fait que $\beta < 1$, d'où $u = v$.$\square$

Théorème de Khan

En 1976, M. S. Khan a prouvé le théorème du point fixe suivant :

***Théorème* 1.2.8.** Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante :

$$d(T(x), T(y)) \leq a\frac{d(x, T(x))d(x, T(y)) + d(y, T(y))d(y, T(x))}{d(x, T(y)) + d(y, T(x))}$$

pour tous $x, y \in X, x \neq y$ et $0 < a < 1$. Alors T admet un point fixe unique dans X.

Deux ans après, B. Fisher a montré que ce théorème est incorrect en s'appuyant sur l'exemple suivant :

***Exemple* 1.2.3.** Soient $X = \{0, 1\}$ muni de la distance usuelle et $T : X \longrightarrow X$ une application définie par

$$T(0) = 1, T(1) = 0.$$

A cet effet, pour que le théorème de Khan soit vérifié, B. Fisher a imposé la condition suivante

$$d(x, T(y)) + d(y, T(x)) = 0 \Longrightarrow d(T(x), T(y)) = 0,$$

et la version correcte du théorème de Khan est la suivante :

***Théorème* 1.2.9.** Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante :

$$d(T(x), T(y)) < a\frac{d(x, T(x))d(x, T(y)) + d(y, T(y))d(y, T(x))}{d(x, T(y)) + d(y, T(x))} \tag{Kh}$$

$$si\ d(x, T(y)) + d(y, T(x)) \neq 0 \tag{$*$}$$

et

$$d(T(x), T(y)) = 0\ si\ d(x, T(y)) + d(y, T(x)) = 0. \tag{$**$}$$

Pour tous $x, y \in X$ et $0 < a < 1$. Alors T admet un point fixe unique dans X.

Preuve

Soit x_0 un élément arbitraire de X. On définit la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ par $x_n = T(x_{n-1}) =$

$T^n(x_0),\ pour\ tous\ n = 1, 2, ...$

En utilisant la condition de Khan, on a

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \\ &\leq ad(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a^n d(x_0, x_1),$$

et donc pour $m \geq n$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq a^n d(x_0, x_1) + ... + a^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= a^n(1 + a + a^2 + ... + a^{m-1-n}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{a^n - a^{m-n}}{1-a} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $a < 1$, on déduit que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui montre que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite $u \in X$ puisque X est complet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(u, T(u)) \leq d(u, x_n) + d(x_n, T(u)).$$

En utilisant la condition de (Kh), on a

$$d(u, T(u)) \leq d(u, x_n) + a\frac{d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, T(u)) + d(u, T(u))d(u, x_n)}{d(x_{n-1}, T(u)) + d(u, x_n)}.$$

Ainsi

$$d(u, T(u)) \leq d(u, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n) + ad(u, T(u)).$$

Donc

$$(1-a)d(u, T(u)) \leq d(u, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n).$$

En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$(1-a)d(u, T(u)) \leq 0.$$

Comme $a < 1$, on en déduit que $d(u, T(u)) = 0$. Ce qui montre que u est un point fixe de T.

Unicité

Soit v un autre point fixe de T, alors

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(T(u),T(v)) \\ &\leq a\frac{d(u,T(u))d(u,T(v)) + d(v,T(v))d(v,T(u))}{d(u,T(v)) + d(v,T(u))} \\ &= a\frac{d(u,u)d(u,v) + d(v,v)d(v,u)}{d(u,v) + d(v,u)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $d(u, v) = 0$. Et donc $u = v$.□

1.3 Points fixes et géométrie des espaces de Banach

Commençons par définir le concept des espaces uniformément convexes introduit par J. A. Clarkson en 1936.

Définition 1.3.1. Un espace uniformément convexe X est un espace vectoriel normé, satisfaisant la condition suivante

$$\forall\ 0 < \epsilon \leq 2, \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que pour tous vecteurs x,y} \in X, \|x\| = \|y\| = 1,$$

$$si\ \|\frac{x+y}{2}\| \geq 1 - \delta \Longrightarrow \|x - y\| \leq \epsilon.$$

Géométriquement parlons, ça veut dire que la boule unité fermée $\overline{B}_X(0, 1)$ est suffisamment ronde, dans le sens où pour chaque deux points différents x_1, x_2 de la boule unité fermée le milieu du segment $[x_1, x_2]$ appartient à l'intérieur de cette boule sauf si ce segment est très petit.

Définition 1.3.2. Soit X un espace de Banach. On dit que X est strictement convexe si pour tous $x, y \in X, x \neq 0, y \neq 0$

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Longrightarrow x = cy\ pour\ c > 0.$$

Géométriquement parlons, la sphère unité $S(0, 1)$ ne contient pas de segments.

Quelques propriétés

1. Le théorème de Milman-Pettis ([113], [124]) assure que chaque espace de Banach uniformément convexe est réflexif, mais la réciproque est en général fausse (voir [54]).
2. Chaque espace uniformément convexe est strictement convexe.

***Exemple* 1.3.1.**

1. Chaque espace de Hilbert est uniformément convexe.
2. Chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach uniformément convexe est uniformément convexe.
3. Les espaces $L^p(1 < p < \infty)$ sont des espaces uniformément convexes.
4. L'espace L^∞ n'est pas uniformément convexe. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si on considère $x = (1,1), y = (0,1)$, on a $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = \|(1,2)\|_\infty = 2$, donc $\|\dfrac{x+y}{2}\|_\infty = 1 \geq 1-\delta, \forall \delta > 0$, mais $\|x-y\|_\infty = \|(1,0)\|_\infty = 1$ n'est pas inférieur à ϵ pour $\epsilon < 1$.
5. Soit $\mu > 0$ et soit $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ équippé de la norme suivante :

   Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$, on définit
   $$\|x\|_\mu = \|x\|_{c_0} + \mu \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{x_i}{i}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
   où $\|.\|_{c_0}$ est la norme usuelle de l'espace l^∞ (la norme sup). Les espaces $(c_0, \|.\|_\mu)$ pour $\mu > 0$ sont des espaces strictement convexes mais ils ne sont pas uniformément convexes tandis que c_0 muni de sa norme usuelle n'est pas strictement convexe (pour plus de détails, voir [54]).

Définition 1.3.3. Un sous ensemble K borné, fermé et convexe d'un espace de Banach X est dit possède la propriété du point fixe $(f.p.p)$ si chaque application non expansive $T : K \longrightarrow K$ admet au moins un point fixe u dans K.

Définition 1.3.4. L'espace de Banach X est dit possède la propriété du point fixe $(f.p.p)$ si chaque sous-ensemble faiblement compact et convexe de X possède la propriété du point fixe.

En 1965, Browder a montré que si X est un espace de Hilbert, alors X possède la propriété $(f.p.p)$. Juste après, Browder et Göhde ont étendu ce résultat au cas des espaces uniformément convexes et au même moment, W. A. Kirk a observé la présence d'une propriété géométrique dite "structure normale" garantissant la propriété $(f.p.p)$.

Soit X un espace de Banach et C un sous ensemble faiblement compact non vide de X. On suppose que C ne possède pas la propriété $(f.p.p)$. Donc il existe une application non expansive $T : C \longrightarrow C$ n'admettant aucun point fixe dans C. On définit

$$\Sigma = \{H \subset C; \text{H non vide, fermé et convexe avec T(H)} \subset H\}.$$

Comme C est faiblement compact, alors Σ est "dirigé vers le bas", en d'autres termes, chaque famille décroissante d'éléments de Σ possède une intersection non vide dans Σ. En utilisant le lemme de Zorn, on obtient l'existence d'un ensemble minimal dans Σ

Définition 1.3.5. Un ensemble convexe K est dit minimal de T si K est un élément minimal de Σ.

Comme T ne possède pas de points fixes, alors chaque ensemble minimal possède plus d'un élément. W. A. Kirk a été le premier à étudier les structures des ensembles minimaux.

Propriétés des ensembles minimaux

Soit K un ensemble minimal de T. Alors

1. $\overline{co}(T(K)) = K$ où $\overline{co}$ est l'enveloppe convexe fermé.
2. $r(x) = \sup\{\|x - y\|; y \in K\} = \delta(K), \forall x \in K$ où δ désigne le diamètre (voir [54, 74]).
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de K telle que

   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0.$$

   Alors pour tout $x \in K$, on a

   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\| = \delta(K).$$

   voir ([54, 74])

Définition 1.3.6. Un point $x \in K$ est dit diamétral si

$$r(x) = \sup\{\|x-y\|; y \in K\} = \delta(K), \forall x \in K.$$

Un ensemble qui est formé que de points diamétraux est dit ensemble diamétral.

Définition 1.3.7. Un sous ensemble non vide borné et convexe K d'un espace de Banach X possède une structure normale si pour tout sous ensemble convexe H de K contenant plus d'un élément, il existe un point $x \in H$ qui n'est pas diamétral pour H.

Le concept de la structure normale a été introduit par Brodskii et Milman en 1948 ([28]).

***Exemple* 1.3.2.** Les espaces de Banach suivants possèdent la propriété $(f.p.p)$

1. Chaque espace de Hilbert de X.
2. Chaque espace uniformément convexe X.
3. Chaque espace réflexif Z de l'espace $L^1[0,1]$; ([74])
4. L'espace c_0 ; ([74])
5. Chaque espace de Banach X ayant une base inconditionnelle $\{e_n\}$ dont la constante inconditionnelle λ satisfait $\lambda < \dfrac{\sqrt{33}-3}{2}$; ([93])
6. Chaque espace de Banach ayant une base inconditionnelle de Schauder monotone (en d'autres termes où la constante inconditionnelle λ est égale à 1) ; ([93])
7. L'espace quasi réflexif de James noté J $(dim(\dfrac{J^{**}}{J}) = 1)$.

Par contre l'espace $L^1[0,1]$ qui n'admet pas de bases inconditionnelles ne possède pas la propriété $(f.p.p)$ comme il le montre ici l'exemple suivant de D. Alspach (1980).

***Exemple* 1.3.3.** Soient $X = L^1[0,1]$ et $K = \{f \in L^1[0,1] : \int_0^1 f = 1, 0 \leq f \leq 2, p.p.\}$.

Il est facile de voir que K est un sous ensemble faiblement fermé et convexe de l'intervalle ordonné $\{f : 0 \leq f \leq 2\}$, et donc K est faiblement compact car les intervalles ordonnés dans $L^1[0,1]$ sont faiblement compacts. Définissons l'application T de K dans K par

$$Tf(t) = \begin{cases} 2f(t) \wedge 2, & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2[f(2t-1)-2] \vee 2, & \text{si } \dfrac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que T est une isométrie. Supposons que T a un point fixe g. D'abord, nous notons que $g = 2\chi_A$ pour un certain ensemble A de mesure $\frac{1}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned}\{t : g(t) = 2\} &= \{t : Tg(t) = 2\} \\ &= \left\{\frac{t}{2} : g(t) = 2\right\} \bigcup \left\{\frac{1+t}{2} : g(t) = 2\right\} \bigcup \left\{\frac{t}{2} : 1 \leq g(t) < 2\right\}.\end{aligned}$$

Comme la mesure de $\left\{\frac{t}{2} : g(t) = 2\right\} \cup \left\{\frac{1+t}{2} : g(t) = 2\right\}$ est égale à la mesure de $\{t : g(t) = 2\}$, il s'en suit que $\{t : 1 \leq g(t) < 2\}$ est de mesure nulle. Aussi l'itération de cet argument montre que

$$\{t : 0 < g(t) < 2\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{t : 2^{-n} \leq g(t) < 2^{-n+1}\}$$

est de mesure nulle

Maintenant, pour $g = 2\chi_A$ et pour tout n, on a

$$\{t : T^n g(t) = 2\} = \sum_{\epsilon_i \in \{0,1\}} \left\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{\epsilon_n}{2^2} + \frac{t}{2^n} : t \in A.\right\}$$

Comme g est fixé et $A = \{t : T^n g(t) = 2\}$ pour tous nombres naturels n, ainsi l'intersection de A avec tout intervalle ayant des extrémités dyadiques a une mesure qui est exactement la moitié de la mesure de l'intervalle. Evidemment aucun tel ensemble mesurable n'existe. Cette contradiction montre que T n'a aucun point fixe.

Remarque 1.3.1. L'ensemble K est de diamètre deux, mais $\|f - 1\| \leq 1$ pour tout $f \in K$ et, donc K ne peut pas être un sous ensemble convexe, faiblement compact et minimal invariant par T. En particulier, l'ensemble

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{f : \|f - (1 + r_i)\| \leq 1\} \bigcap \{f : \|f - 1\| \leq 1\} \bigcap K,$$

où $r_i = sgn[\sin 2\pi it]$ est la ième fonction de Rademacher est invariant.

Remarque 1.3.2. La question suivante reste toujours ouverte : existe -t- il un sous ensemble convexe borné et fermé d'un espace réflexif (par conséquent faiblement compact) qui ne possède pas la propriété $(f.p.p)$.

Beaucoup de questions intéressantes posées essentiellement par W. A. Kirk qui traitent de la propriété $(f.p.p)$ et sa liaison avec la géométrie des espaces de Banach ont fait l'objet d'un joli article écrit par T. Benavides et publié dans Arabian J. Mathematics (pour plus de détails, voir [16]).

1.4 Mesures de non compacité et opérateurs condensants

Soit X un espace métrique. Une application continue $T : X \longrightarrow X$ est dite condensante si l'image de n'importe quel ensemble est plus compact que l'ensemble lui même dans un certain sens. Si X est un espace normé, on peut parler de la notion d'un opérateur (non linéaire) condensant. Le degré de non compacité d'un ensemble est mesuré au moyen des fonctions appelées mesures de non compacité. Ces dernières ont été considérées pour la première fois par K. Kuratowski en 1930. A la mi des années 50, et dans les travaux des G. Darbo, L. S. Gol'denshtein, I. Gohberg, A. S. Markus, W. V. Petryshyn, A. furi, A. Vignoli, J. Danes, Yu. G. Borisovich, Yu. I. Sapronov, M. A. Krasnosel'skii, P. P. Zabreiko, d'autres mesures de non compacité ont été appliquées en théorie de point fixe. Dans les chapitres 7,8 et 9 on va s'intéresser à quatre d'entres-elles, celle de Kuratowski, de Hausdorff, la mesure de non compacité au sens général et la mesure de non compacité faible.

1.4.1 Mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff

On commence par définir les mesures de non compacité (en abrégé MNC) de Kuratowski et celle de Hausdorff et nous allons donner leurs propriétés fondamentales.

Soit X un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide, borné de X. Notons par
– $B(x, r)$ et $\overline{B}(x, r)$ la boule ouverte (resp, fermée) dans X de centre x et de rayon r.
– $\delta(\Omega)$: le diamètre de l'endemble Ω, i.e.,

$$\delta(\Omega) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in \Omega\}$$

Définitions

Définition 1.4.1. La mesure de non compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, i.e.,

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d > 0, \Omega = \bigcup_{i}^{n} \Omega_i \ tel\ que\ \delta(\Omega_i) \leq d\}.$$

Avant de donner la définition de la mesure de non compacité de Hausdorff, rappelons d'abord la notion de $\epsilon-$filet dans le cas où $(X, \|.\|)$ est un espace normé. Ici, on note par $B_X = B(0, 1)$.

Définition 1.4.2. Soit X un espace normé. Un ensemble $S \subset X$ est appelé un $\epsilon-$filet de Ω si

$$\Omega \subset S + \epsilon \overline{B}_X = \{s + \epsilon b; s \in S; b \in \overline{B}_X\}$$

Définition 1.4.3. La mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble Ω, notée $\chi(\Omega)$ est l'inf des nombres ϵ tels que Ω a un $\epsilon-$filet fini dans X.

Maintenant, nous donnons certaines propriétés fondamentales des mesures de non compacité que nous utiliserons dans la suite.

Remarque 1.4.1. Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors $\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty$.

Quelques propriétés des MNC de Kuratowski et de Hausdorff

Les mesures de non compacité α et χ notées ci dessous par Ψ satisfont les propriétés suivantes :

a) régularité : $\Psi(\Omega) = 0$ si et seulement si Ω is totalement bornée ;

b) non-singularité : Ψ est égale à zero sur chaque ensemble formé d'un seul élément ;

c) monotonie : $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ implique $\Psi(\Omega_1) \leq \Psi(\Omega_2)$;

d) semi-additivité : $\Psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) = \max\{\Psi(\Omega_1), \Psi(\Omega_2)\}$;

e) Lipschitzianité : $|\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2)| \leq 2\rho(\Omega_1, \Omega_2)$; où ρ désigne la semi métrique de Hausdorf $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{\epsilon > 0 : \Omega_1 + \epsilon\overline{B}_X \supset \Omega_2, \Omega_2 + \epsilon\overline{B}_X \supset \Omega_1\}$;

f) continuité : Pour tout $\Omega \in \mathcal{P}(X)$ et tout ϵ il existe $\delta > 0$ tel que $|\Psi(\Omega) - \Psi(\Omega_1)| < \epsilon$ pour tout Ω_1 satisfaisant $\rho(\Omega, \Omega_1) < \delta$;

g) semi-homogeneité : $\Psi(t\Omega) = |t|\Psi(\Omega)$ pour tout nombre t ;

h) semi-additivité algébrique : $\Psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \Psi(\Omega_1) + \Psi(\Omega_2)$;

i) invariance par translation : $\Psi(\Omega + x_0) = \Psi(\Omega)$ pour tout $x_0 \in X$.

Remarque 1.4.2. Il est facile d'observer que la non-singularité découle directement de la régularité et la monotonie de la semi-addivité et la continuité de la lipschitzianité.

La mesure de non compacité de Kuratowski ou de Hausdorff sont invariantes par le passage à la fermeture et à l'enveloppe convexe, ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. Soient Ψ une mesure de non compacité (Kuratowski ou de Hausdorff) et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach X. Alors

$$\Psi(\Omega) = \Psi(\overline{\Omega}) = \Psi(co\Omega).$$

où $\overline{\Omega}$ est la fermeture de Ω.

Preuve Voir ([3])

D'autre part, les deux mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par les inégalités suivantes :

Théorème 1.4.2. Soient α et χ les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach X. Alors

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

Preuve Voir ([3])

1.4.2 Notion générale sur les mesures de non compacité

Dans cette section nous donnons une définition axiomatique de la mesure de non compacité.

Définition 1.4.4. Une fonction Ψ définie sur l'ensemble de tous les sous ensembles d'un espace de Banach X à valeurs dans un ensemble Q partiellement ordonné par la relation $\leq$ est appelée une mesure de non compacité dans le sens général si :

$$\Psi(\overline{co}\Omega) = \Psi(\Omega), \ \forall \Omega \subset X.$$

Remarque 1.4.3. Les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff satisfont à la condition de cette définition générale.

1.4.3 Mesure de non compacité faible de De Blasi

Dans toute cette section, X désigne un espace de Banach, Ω_X la famille de toutes les parties non vides bornées de X et Γ_X un sous ensemble de Ω_X formé de toutes les parties faiblement compactes de X. Soit $\overline{B}_r$ la boule fermée dans X de centre 0 et de rayon r.

Dans [85], De Blasi a introduit l'application suivante $\nu : \Omega_X \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$\nu(M) = \inf\{r > 0 : \text{il existe un ensemble N} \in \Gamma_X \text{ tel que M} \subseteq N + \overline{B}_r\},$$

pour tout $M \in \Omega_X$.

Définition 1.4.5. L'application ν est appellée la mesure de non compacité faible de De Blasi.

Quelques propriétés

Soient $M_1, M_2 \in \Omega_X$, alors,

1. Monotonie : Si $M_1 \subseteq M_2$, alors $\nu(M_1) \leq \nu(M_2)$.
2. $\nu(M_1) = 0$ si et seulement si M_1 est relativement faiblement compact.
3. $\nu(\overline{M_1^w}) = \nu(M_1)$, où $\overline{M_1^w}$ la fermeture pour la topologie faible de M_1.
4. Semi-homogeneité : $\nu(\lambda M_1) = |\lambda|(M_1)$ pout tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Invariance par enveloppe convexe : $\nu(co(M_1)) = \nu(M_1)$.
6. Semi-additivité algébrique : $\nu(M_1 + M_2) \leq \nu(M_1) + \nu(M_2)$.
7. Si $(M_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante des parties non vide, bornées, et faiblement fermées de X avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \nu(M_n) = 0$, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$ et $\nu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n) = 0$, i.e. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ est relativement faiblement compact.

Une caractérisation de la mesure de non compacité faible de De Blasi dans les espaces L^1 a été donnée par Appell et De Pascale sous une forme plus simple comme suit

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\{sup_{x\in M}\{sup\{\int_{E_0} |x(t)|dt : E_0 \subseteq E, mes(E_0) \leq \epsilon\}\}\}$$

pour tout $M \in \Omega_{L_1(E)}$ où mes désigne la mesure de Lebesgue.

Définition 1.4.6. Une application $f : M \subseteq X \longrightarrow X$ est dite $\nu-$contractive si elle envoie les ensembles bornés de M vers des ensembles bornés de X tel qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ avec

$$\nu(f(A)) \leq \beta\nu(A)$$

pour tout ensemble borné $A \subseteq M$.

Soit $g : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire. On aura besoin des deux conditions suivantes :

$$(H_1) \qquad \begin{cases} Si\ (\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans } X\text{, alors} \\ (\mathrm{g}(\mathrm{x}_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une sous suite fortement convergente dans } X. \end{cases}$$

$$(H_2) \qquad \begin{cases} Si\ (\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite faiblement convergente dans } X\text{, alors} \\ (\mathrm{g}(\mathrm{x}_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet une sous suite faiblement convergente dans } X. \end{cases}$$

Remarque 1.4.4.

1. Les opérateurs satisfaisant (H_1) ou (H_2) ne sont pas nécessairement faiblement continus.
2. Une application g satisfait (H_2) si et seulement si elle envoie les ensembles relativement faiblement compacts vers des ensembles relativement faiblement compacts.

Maintenant, nous sommes prêts à annoncer le résultat suivant :

Théorème 1.4.3. Soient K un sous ensemble non vide fermé et convexe de X et $T : K \longrightarrow K$ une application continue satisfaisant (H_1). Si $T(K)$ est relativement faiblement compact, alors il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$.

Preuve Voir [85].

Notons que l'ensemble K dans le théorème précédent n'est pas nécessairement borné. Dans le cas où K est supposé être borné, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.4.4. Soient K un sous ensemble non vide borné, fermé et convexe de X et $T : K \longrightarrow K$ une application continue satisfaisant (H_1). Si T est ν-contractive, alors il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$.

Preuve Soient $M_1 = K$ et $M_{n+1} = \overline{co}(T(M_n))$. Il est clair que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formé des parties non vides, fermées, convexes et déroissantes de K. Comme T est ν-contractive, alors, pour un certain $\beta \in [0, 1[$, on a

$$\nu(M_2) = \nu(\overline{co}(T(M_1))) = \nu(T(M_1)) \leq \beta\nu(M_1).$$

Par induction, on obtient

$$\nu(M_{n+1}) \leq \beta^n \nu(K),$$

et donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \nu(M_n) = 0$. En utilisant la propriété 7) de ν, on conclut que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et faiblement compact de K. De plus, il est facile d'observer que $T(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Par conséquent, $T(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n)$ est relativement faiblement compact. Enfin, l'utilisation du Théorème 1.4.3 conclut la preuve.$\square$

1.4.4 Opérateurs condensants

Les opérateurs condensants sont une extension des opérateurs compacts. Ils fournissent un outil puissant dans diverses applications de l'analyse fonctionnelle.

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les opérateurs condensants et nous allons étudier certaines de leurs propriétés.

Définitions et exemples

Définition 1.4.7. Soient (X, d) un espace métrique, $T : X \longrightarrow X$ une application continue et $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ l'une des mesures de non compacité de Kuratowski, Hausdorff ou dans le sens général. On dit que T est condensante par rapport à la mesure $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ si pour tout sous ensemble borné A de X tel que $\alpha_i(A) > 0$, on a :

$$\alpha_i(T(A)) < \alpha_i(A).$$

Exemple 1.4.1. Tout opérateur compact défini sur un ensemble borné d'un espace de Banach est évidemment un opérateur condensant.

Quelques propriétés des opérateurs condensants

Soient T_1 et T_2 deux applications définies sur un espace métrique X dans lui même, alors

1. Si T_1 et T_2 deux applications condensantes alors $T_2 \circ T_1$ est un application condensante.
2. Si T_1 un application condensante et T_2 un opérateur compact alors $T_1 + T_2$ est un application condensante. En effet, si A un ensemble non vide borné de X tel que

$\alpha(A) > 0$.

$$\begin{aligned}\alpha(T_2+T_1)(A) &\leq \alpha[T_1(A)] + \alpha[T_2(A)] \\ &< \alpha(A).\end{aligned}$$

3. L'ensemble de tous les opérateurs condensants est un ensemble convexe. En effet, Soit Ω un ensemble non vide de X tel que $\alpha(\Omega) > 0$ et $\lambda \in [0,1]$. Considérons l'opérateur $T_\lambda = \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$ et supposons que pour Ω, nous avons $\alpha(T_\lambda(\Omega)) \geq \alpha(\Omega)$. Il est clair que $T_\lambda(\Omega) \subset co[T_1(\Omega) \bigcup T_2(\Omega)]$. En utilisant la semi-additivité de α, nous avons

$$\alpha[T_\lambda(\Omega)] \leq \max\{\alpha[T_1(\Omega), \alpha[T_2(\Omega)\}$$

Le membre droit de cette inégalité égale soit $\alpha[T_1(\Omega)]$ ou bien $\alpha[T_2(\Omega)]$. Supposons que le premier cas est vérifié. Alors d'après ce qui précède, on a

$$\alpha[T_1(\Omega)] \geq \alpha(\Omega).$$

Contradiction. Donc $\alpha[T_\lambda(\Omega)] < \alpha(\Omega)$.$\square$

Théorème 1.4.5. Soit A un sous ensemble non vide borné, convexe et fermé d'un espace de Banach X et soit $T : A \longrightarrow A$ une application continue. Si T est condensante, alors elle admet au moins un point fixe.

Preuve

Etant donné un élément $x_0 \in A$ et nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{D \subseteq A : \text{D est convexe fermé, } \text{x}_0 \in D \; et \; T : D \longrightarrow D.\}$$

Posons $B = \bigcap_{D\in\mathcal{M}} D$ et $K = \overline{co}(T(B) \bigcup \{x_0\})$. Comme $x_0 \in B$ et $T : B \longrightarrow B$, il s'ensuit que $K \subseteq B$, ce qui implique que

$$T(K) \subseteq B \subseteq K.$$

En outre, comme $x_0 \in K$, nous obtenons que $K \in \mathcal{M}$. Par conséquent, nous pouvons conclure que $K = B$. D'autre part, en utilisant les propriétés de la mesure de non compacité α, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\alpha(K) =& \alpha(\overline{co}(T(B) \bigcup \{X_0\})) \\ =& \alpha(T(B)) \\ =& \alpha(T(K)) \\ <& \alpha(K),\end{aligned}$$

ce qui implique $\alpha(K) = 0$. Donc K est relativement compact. Comme $T : B \longrightarrow B$ est continue et B est compact, alors par le théorème de Schauder, nous déduisons que T a au moins un point fixe. □

1.5 Quelques processus itératifs

Définition 1.5.1. Un espace métrique convexe est un triplet $(X, d, \oplus)$ tel que (X, d) est un espace métrique et $\oplus : X \times X \times [0, 1] \longrightarrow X$ l'application de convexité suivante :

$$d(z, (1-\lambda)x \oplus \lambda y) \leq (1-\lambda)d(z, x) + \lambda d(z, y),$$

pour tous $x, y, z \in X, \lambda \in [0, 1]$.

Exemple 1.5.1. Évidemment, Les espaces normés et les boules fermées dans un espace de Hilbert sont des espaces métriques convexes.

Chaque espace métrique convexe satisfait la propriété suivante :

Proposition 1.5.1. Si $(X, d, \oplus)$ un espace métrique convexe, alors

$$d(x, (1-\lambda)x \oplus \lambda y) = \lambda d(x, y) \quad et \quad d(y, (1-\lambda)x \oplus \lambda y) = \lambda d(x, y),$$

pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Comme conséquence immédiate, nous obtenons $1x \oplus 0y = x$ et $0x \oplus 1y = y$ et $(1-\lambda)x \oplus \lambda x = \lambda x \oplus (1-\lambda)x = x$.

Définition 1.5.2. Un sous ensemble non vide C d'un espace métrique convexe $(X, d, \oplus)$ est dit convexe si

$$(1-\lambda)x \oplus \lambda y \in C$$

pour tous $x, y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$.

Remarque 1.5.1. Tout sous-ensemble convexe d'un espace métrique convexe est lui même un espace métrique convexe.

1.5.1 Certains processus itératifs

Itération de Picard

Soient (X,d) un espace métrique, $T : X \longrightarrow X$ une application et $x_0 \in X$. La suite de Picard est donnée par :

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{1.5.1}$$

Exemple 1.5.2. Soit C un sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet (X,d). Si $T : C \longrightarrow C$ satisfait l'une des conditions $(I), (BW), (MK), (Ja), (GS), (Ka), (GD), (Kh)$, alors T admet un point fixe unique. De plus, l'itération de Picard converge vers le point fixe. Cependant, dans le cas échéant, l'intération de Picard peut ne pas converger comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.5.3. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, muni de la métrique discrète et $T : X \longrightarrow X$ une application définie par : $T(x_1) = x_3, T(x_2) = x_2$ et $T(x_3) = x_1$. Il est facile de vérifier que $d(T(x_i), T(x_j)) \leq d(x_i, x_j)$ pour tous $i, j \in \{1,2,3\}$. De plus, l'itération de Picard de T avec le point initial x_1 ou x_3, ne converge pas vers x_2 qui est le point fixe de T.

En tenant compte de l'exemple ci-dessus, on peut affirmer que certains autres processus itératifs doivent être pris en considération. Maintenant, nous allons introduire les plus importants d'entre eux dans les espaces métriques convexes.

Processus itératif de Mann

Soient $(X, d, \oplus)$ un espace métrique convexe et $T : X \longrightarrow X$ une application. Le processus itératif de Mann est défini par :

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n T(x_n), \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{1.5.2}$$

où $x_0 \in X$ et $\{\alpha_n\}_n \subset [0,1]$.

Dans le cas où $\alpha_n = 1$, le processus itératif de Mann se réduit à celui de Picard.

Processus Itératif d'Ishikawa

Soit $x_0 \in X$. Le processus d'Ishikawa est défini par l'algorithme :

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n T(x_n), \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n T(y_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.5.3}$$

où $\{\alpha_n\}_n$ et $\{\beta_n\}_n$ sont des suites dans $[0,1]$.

Dans le cas où $\beta_n = 0$, le processus itératif d'Ishikawa se réduit à celui de Mann.

Processus Itératif de Kirk

Soient $(X, \|.\|)$ un espace normé, K un sous-ensemble borné, fermé, convexe de X et T une application définie sur K. Pour chaque $x \in K$, la suite $\{S^n(x)\}$ définie par $S : K \longrightarrow K$, où

$$S = \lambda_0 I + \lambda_1 T + ... + \lambda_n T^n, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 > 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \tag{1.5.4}$$

est dite le processus d'itération de Kirk.

1.5.2 Classe des applications φ-quasi-non expansives

En 2012, D. Ruiz a introduit une nouvelle classe d'applications connue par les applications φ-quasi-non expansives définies comme suit :

Définition 1.5.3. Soit T une application définie sur un espace métrique (X,d) dans lui même. On dit que T est φ-quasi-non expansive si $F(T) \neq \emptyset$ et s'il existe une fonction $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ telle que :

$$d(T(x), z) \leq \varphi(d(x,z)),$$

pour tous $x \in X, z \in F(T)$: l'ensemble de points fixes de T.

Remarque 1.5.2. Notons ici, si on prend $\varphi = I$, on obtient le concept des applications quasi-non expansives introduit par Tricomi en 1916 pour les les fonctions réelles et étudié plus tard par Diaz-Metcalf en $1967-1969$ et Dotson en 1970 pour les applications définies sur des espaces de Banach.

Exemple 1.5.4.

1. Toute application contractante est une application φ-quasi-non expansive avec $\varphi = kt$ pour $t \geq 0$ mais l'inverse n'est pas vrai comme le montre l'exemple de Dotson suivant : l'application $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
qui est φ-quasi-non expansive mais pas une contraction.
2. Toute application qui satisfait la condition de Kannan (Ka) est φ-quasi-non expansive avec $\varphi(t) = \dfrac{a}{2-a}t$ pour $t \geq 0$.
3. Toute application qui satisfait la condition de Jaggi (Ja) est φ-quasi-non expansive avec $\varphi(t) = \beta t$ pour $t \geq 0$.

1.5.3 Convergence et stabilité

Sur la convergence des applications φ-quasi-non expansives

Le thèoréme suivant, nous donne des conditions suffisantes pour la convergence de l'itération de Mann sur un espace métrique convexe, où l'application T est supposée φ-quasi-non expansive.

Théorème 1.5.1. Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace métrique convexe $(X, d, \oplus)$. Supposons que $T : C \longrightarrow C$ une application φ-quasi-non expansive avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ étant une fonction continue telle que $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$. Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dans $[0, 1]$ convergeant vers un certain nombre réel positif. Alors, pour tout $x_0 \in C$, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (1.5.2) converge vers l'unique point fixe de T.

Preuve Voir ([141]).$\square$

Remarque 1.5.3. Notons que si dans le résultat précédent, nous prenons $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous obtenons un résultat de convergence de l'itération de Picard. d'ailleurs, ce résultat reste toujours valable si on suppose juste que C est un sous-ensemble non vide d'un espace métrique.

Corollaire 1.5.1. Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace métrique (X, d). Supposons que $T : C \longrightarrow C$ une application φ-quasi-non expansive avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ étant une fonction continue telle que $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$. Alors, pour tout $x_0 \in C$, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (1.5.1) converge vers l'unique point fixe de T.

Le théorème suivant est un prolongement du Théorème 1.5.1 au processus d'itération d'Ishikawa.

Théorème 1.5.2. Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace métrique convexe $(X, d, \oplus)$. Supposons que $T : C \longrightarrow C$ une application φ-quasi-non expansive avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ étant une fonction continue telle que $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$. Soient $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles dans $[0, 1]$ telles que $\{\alpha_n\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain nombre réel positif. Alors, pour tout $x_0 \in C$, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (1.5.3) converge vers l'unique point fixe de T.

Preuve Identique à celle de Théorème 1.5.1.$\square$

Sur la stabilité des applications φ-quasi-non expansives

Le concept de la stabilité des processus itératifs est dû à Ostrowski, comme a été mentionné par Rhoades dans son article [132] et a été systématiquement étudié par Harder dans sa thèse [58], ensuite publié dans des papiers de Harder et Hicks[59], [60]. Nous commençons cette section par deux définitions d'un processus itératif général.

Définition 1.5.4. Soient (X, d) un espace métrique, $T : X \longrightarrow X$ une application et $\{x_n\}_n \subset X$ une suite définie par :

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{1.5.5}$$

où $x_0 \in X$ et f une fonction. Supposons que $\{x_n\}_n$ converge vers le point fixe z_0 de T. Soit $\{y_n\}_n \subset X$. Définissons

$$\epsilon_n := d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Alors :

1. Le processus d'itération (1.5.5) est dit T-stable si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \epsilon_n = 0 \text{ implique } \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0.$$

2. Le processus d'itération (1.5.5) est dit presque T-stable si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < \infty \text{ implique } \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0.$$

Remarque 1.5.4. Il est facile de vérifier qu'un processus itératif T-stable est presque T-stable mais l'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre un exemple d'Osilike [118].

Dans un papier d'Olatinwo [117], on peut trouver une excellente introduction et quelques commentaires intéressants et riches de plusieurs résultats de stabilité établis dans les espaces métriques et normés.

Nous discutons maintenant la question de la presque T-stabilité du processus d'itération de Picard.

Théorème 1.5.3. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application φ-quasi-non expansive avec $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ étant une fonction continue telle que $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et z_0 est l'unique point fixe de T. Soit $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = T(x_n), n \in \mathbb{N}$ le processus de Picard. Soit $\{y_n\}_n \subset X$ et définissons $\{\epsilon_n\}_n$ par

$$\epsilon_n := d(y_{n+1}, T(y_n)) \text{ pout tout } n \in \mathbb{N}$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < \infty$, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0$. En d'autre termes, le processus de Picard est presque T-stable.

Preuve Voir [141] .$\square$

Chapitre 2

Sur quelques extensions du principe de contraction de Banach et applications à la convergence et à la stabilité de quelques processus itératifs

2.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous établissons quelques résultats d'existence et d'unicité de points fixes pour un type d'applications non linéaires satisfaisant une condition de la forme (Φ_1, Φ_2) donnée comme une perturbation du Φ_2-contraction par une fonction convenable Φ_1 dans le cas des espaces métriques et de Banach, ce qui permet d'étendre le principe de contraction de Banach et d'autres résultats connus dans la littérature. En outre, le caractère Φ-quasi-non expansive de notre contexte est prouvé afin d'obtenir des résultats de convergence et de stabilité des processus itératifs de Mann et d'Ishikawa.

2.2 Introduction

Il s'est avéré à travers les années que la théorie de point fixe est un outils puissant pour la résolution des problèmes non linéaires, les racines de la notoriété de cette théorie remonte aux célèbre résultat de Banach (1922), ce dernier a donné une formulation obstraite à la méthode des approximations successives systématiquement utilisées par Liouville (1837) dans ces travaux, on signale que le travail de Banach a été établi dans un cadre Banachique puis étendu au cas métrique par Cacciopoli (1930). Depuis, cette théorie est devenu un domaine florissant pour plusieurs auteurs qui ont contribué dans l'élaboration des méliers d'articles en introduisant diverses variantes de contractions, on peut consulter sur ce sujet par exemple les travaux de [2, 19, 23, 26, 29, 36, 37, 48, 61, 65, 68, 79, 101, 126, 130, 138, 140, 142, 146, 151, 153].

Dans ce chapitre, nous établissons, dans le cas des espaces métriques complets, quelques résultats d'existence et d'unicité de points fixes pour les applications non linéaires T satisfaisant une inégalité où la distance entre les valeurs $T(x)$ et $T(y)$ est dominée par une perturbation convenablement choisie d'une Φ-contraction. En outre, le fait que si M est un ensemble convexe d'un espace de Banach X et T une application sur M et P est un polynôme réel dont la somme de ses coefficients est égale à 1 implique que $P(T)$ est également une application sur M, cela nous a poussé à étudier l'ensemble de points fixes de $P(T)$ et la coïncidence possible avec ceux de T. En outre, en tenant compte d'un résultat récent de D.A. Ruiz [141], nous montrons la convergence des processus itératifs de Mann et d'Ishikawa et la presque stabilité du processus du Picard.

2.3 Résulats principaux

Nous commençons nos résultats principaux par le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application continue satisfaisant les conditions suivantes :

$$d(T(x), T(y)) \leq \Phi_1[d(x, T(x)), d(y, T(y), d(x, y)] + \Phi_2[d(x, y)], \tag{2.3.1}$$

pour tous $x, y \in X$. Ici, $\Phi_1 : [0, \infty[\times[0, \infty[\times]0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ et $\Phi_2 : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ sont des fonctions où :

1. $\Phi_1(t_1, t, t) \leq \widetilde{\Phi_1}(t_1) \qquad \forall t_1 \geq 0$ et $\forall t > 0;$
2. Φ_2 est croissante et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \Phi_2^{(n)}(t) = 0;$

3. $(I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}$ existe avec $(I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}$ croissante telle que $\Phi_2(I-\widetilde{\Phi_1})^{-1} \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(I-\widetilde{\Phi_1})^{-(n)}\Phi_2^{(n)}(t) < \infty$ pour tout $t > 0$.

Alors, T admet au moins un point fixe dans X. En outre, si $\Phi_1(0,0,t_3) = 0 \;\; \forall t_3 > 0$, on obtient l'unicité du point fixe de T.

Remarque 2.3.1. Chaque fonction Φ qui satisfait la condition 2 du Théorème 2.3.1 doit vérifier que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

Preuve du Théorème 2.3.1. Soient x_0 un point arbitraire de X et soit la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ telle que $x_n = T^n(x_0)$. Il est clair que si $x_n = x_{n+1}$ pour un certain n, alors le résultat est immédiat. Soit $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la condition (2.3.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &\leq \Phi_1[d(x_n,T(x_n)),d(x_{n-1},T(x_{n-1})),d(x_n,x_{n-1})] + \Phi_2[d(x_n,x_{n-1})] \\ &= \Phi_1[d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n-1},x_n),d(x_n,x_{n-1})] + \Phi_2[d(x_n,x_{n-1})]. \end{aligned}$$

Appliquons l'assertion 1, nous obtenons

$$d(x_{n+1},x_n) \leq \widetilde{\Phi_1}[d(x_n,x_{n+1})] + \Phi_2[d(x_n,x_{n-1})],$$

ce qui implique que :

$$(I-\widetilde{\Phi_1})[d(x_n,x_{n+1})] \leq \Phi_2[d(x_n,x_{n-1})].$$

Comme $(I-\widetilde{\Phi_1})$ est inversible et croissante, il s'en suit que

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}[\Phi_2(d(x_n,x_{n-1}))].$$

Par ailleurs, la croissance de Φ_2, et $(I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}$, donne

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}[\Phi_2((I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}(\Phi_2(d(x_{n-1},x_{n-2}))))].$$

Par la première partie de l'assumption 3, nous obtenons

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-(2)}[\Phi_2^{(2)}(d(x_{n-1},x_{n-2}))].$$

En outre, par induction, nous avons également

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-(n)}[\Phi_2^{(n)}(d(x_1,x_0))].$$

D'autre part, l'inégalité triangulaire entraîne pour $m \geq n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{(-n)} \Phi_2^{(n)}[d(x_1, x_0)] + (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(n+1)} \Phi_2^{(n+1)}[d(x_1, x_0)] + ... \\ &..... + (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(m-1)} \Phi_2^{(m-1)}[d(x_1, x_0)]. \end{aligned}$$

Posons $H = (I - \widetilde{\Phi}_1)^{-1} \Phi_2$. En utilisant la deuxième partie de l'assertion 3, nous en déduissons que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq (H^{(n)} + H^{(n+1)} + ... + H^{(m-1)}) d(x_0, x_1) \\ &\longrightarrow 0 \ si \ m, n \longrightarrow +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(x_n)_1^{+\infty}$ est une suite de Cauchy et comme X est complet, il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = u$. De plus, la continuité de T dans X implique :

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} T(x_n) \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_{n+1} \\ &= u. \end{aligned}$$

Par conséquent u est un point fixe de T dans X.

Maintenant, supposons que la condition $\Phi_1(0, 0, t_3) = 0 \ \ \forall t_3 > 0$ est satisfaite. Pour montrer l'unicité, soit $v \neq u$ dans X tel que $T(v) = v$, alors :

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(T(u), T(v)) \\ &\leq \Phi_1[d(u, T(u)), d(v, T(v)), d(u, v)] + \Phi_2[d(u, v)] \\ &= \Phi_1[0, 0, d(u, v)] + \Phi_2[d(u, v)] \\ &\leq \Phi_2[d(u, v)] \\ &< d(u, v). \end{aligned}$$

Contradiction. Donc u est un point fixe unique pour T dans X. $\square$

Remarque 2.3.2. Comme cas particulier du Théorème 2.3.1, nous trouvons les situations suivantes :

Premier cas : Si $\Phi_1 \equiv 0$ et $\Phi_2 = \alpha t$ tels que $\alpha \in [0,1[$. Nous obtenons le principe de contraction de Banach.

Deuxième cas : Si $\Phi_1 \equiv 0$. Nous obtenons un des résultats principaux de V. Berinde ([20], Theorem 2).

Troisième cas : Si $\Phi_1(t_1,t_2,t_3) = \dfrac{\alpha t_1 t_2}{t_3}$ et $\Phi_2(t) = \beta t$ pour $\alpha, \beta \in [0,1[$ avec $\alpha + \beta < 1$. Nous obtenons le résultat principal D. S. Jaggy ([65], Theorem 1).

Remarque 2.3.3. Il est facile d'observer que les techniques de la preuve du Théorème 2.3.1 peuvent être employées pour établir un des résultats principaux de C. O. Imoru et al ([62], Theorem 2.1).

Exemple 2.3.1. Soient $\Phi_1 : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ et $\Phi_2 : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ des fonctions données par :

$$\Phi_1(t_1,t_2,t_3) = |\sin(t_1)| t_2 e^{-t_3} \text{ et } \Phi_2(t) = \alpha t; (0 \leq \alpha < \frac{e-1}{e}).$$

Nous pouvons vérifier que Φ_1 et Φ_2 satisfont les assertions du Théorème 2.3.1. De plus, nous avons $|\sin(t_1)| \leq |t_1|$ pour tout $t_1 \geq 0$ et $te^{-t} \leq \dfrac{1}{e}$ pour $t > 0$, ce qui donne que l'assertion 1 est établie en prenant $\widetilde{\Phi_1}(t_1) = \dfrac{1}{e} t_1$. En outre, nous avons $\Phi_1(t_1,0,t_3) = 0$. D'autre part, le fait que $(I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2 = \Phi_2(I - \widetilde{\Phi_1})^{-1} = \dfrac{\alpha e}{e-1} t$ implique la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(n)} \Phi_2^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{\alpha e}{e-1})^n t$.

Dans le résultat suivant, nous allons montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe commun de deux applications qui commutent.

Lemme 2.3.1. Soient T_1 et T_2 deux applications définies sur un espace métrique (X,d) satisfaisant la condition suivante

$(\imath)$ $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$;

$(\imath\imath)$ $F(T_i) \subseteq F(T_j)(i \neq j)(i,j = 1,2)$, où $F(T_k), k = 1,2$ est l'ensemble de points fixes de T_k.

Si T_j admet un point fixe unique $u \in X$, alors u est point fixe unique pour T_i.

Preuve. Si u est un point fixe de T_j, alors :

$$T_j(u) = u,$$

il s'en suit que

$$T_i[T_j(u)] = T_i(u).$$

Comme T_i et T_j commutent, nous obtenons

$$T_j[T_i(u)] = T_i(u),$$

ce qui montre que $T_i(u)$ est un point fixe de T_j. Le fait que u est l'unique point fixe T_j, alors :

$$T_i(u) = u.$$

Donc u est un point fixe de T_i. L'unicité concernant le point fixe de T_i est triviale. □

Corollaire 2.3.1. Soient M un sous ensemble non vide, convexe d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ et $T : M \longrightarrow M$ une application (non nécessairement continue) et soit P un polynôme réel donné par

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n \text{ avec } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = 0, 1, ..., n$$

Alors,

($\imath$) Si $u \in M$ est un point fixe de T, alors u est un point fixe de $P(T)$ défini par

$$P(T) = \lambda_0 I + \lambda_1 T + ... + \lambda_n T^n$$

($\imath\imath$) Si $u \in M$ est un point fixe de $P(T)$ et $P(T) \circ T = T \circ P(T)$, alors u est un point fixe unique de T dans M.

($\imath\imath\imath$) Si $u \in M$ est un point fixe de $P(T)$ et $P(T) \circ T \neq T \circ P(T)$. Alors, on a l'une des situations suivantes :

- (a) T n'admet aucun point fixe dans M, ou
- (b) T admet u comme point fixe unique dans M.

Preuve

($\imath$) Il est facile d'observer $P(T) : M \longrightarrow M$. Si $u \in M$ est un point fixe de T, alors

$$P(T)(u) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\} u = u \in M,$$

ce qui montre que $u \in M$ est un point fixe de $P(T)$.

$(\imath\imath)$ Se déduit du Lemme 2.3.1 car nous avons $F(T) \subseteq F(P(T))$.

$(\imath\imath\imath)$ Supposons que $v \neq u$ est un autre point fixe de T dans M, l'assertion $(\imath)$ montre que v est un point fixe de $P(T)$ ce qui est une contradiction.

Remarque 2.3.4. Soit P un polynôme donné comme dans l'assertion $(\imath)$ du Corollaire 2.3.1 avec $\lambda_1 > 0$. W. A. Kirk [80] a montré que dans ce cas $F(T) = F(P(T))$ pour T nonexpanxsive, nous signalons que la condition $\lambda_1 > 0$ est cruciale comme le montre l'exemple suivant .

Exemple 2.3.2. Soit $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une application définie par :

$$T(x) = 1 - x.$$

Il est facile d'observer que T est non expansive et $u = \dfrac{1}{2}$ est le point fixe unique T.

Maintenant, nous considérons le polynôme suivant :

$$P(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}.$$

Il s'en suit que,

$$P(T) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto P(T)(x) = x$$

et $P(T) \circ T = T \circ P(T) = 1 - x$.

Dans ce cas, nous observons que le point fixe de $P(T)$ est l'intervalle $[0, 1]$. Ici, nous avons $F(T) \subsetneq F(P(T))$.

Le théorème suivant généralise le Théorème 2.3.1

Théorème 2.3.2. Soient M un sous ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$ et $T : M \longrightarrow M$ une application (non nécessairement continue). Supposons que Φ_1 et Φ_2 satisfont les hypothèses du Théorème 2.3.1. Soit P le polynôme réel suivant :

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n \text{ où } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = 0, 1, ..., n$$

pour tout $P(T)$ qui commute avec T et pour tous $x, y \in M$,

$$\|P(T)(x) - P(T)(y)\| \leq \Phi_1(\|x - P(T)(x)\|, \|y - P(T)(y)\|, \|x - y\|) + \Phi_2(\|x - y\|).$$

Si $P(T)$ est continu alors T admet un point fixe unique.

Preuve. Comme $P(T)$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.3.1. Donc, le résultat découle immédiatement à partir de l'assertion ($\imath\imath$) du Corollaire 2.3.1. $\square$

Exemple 2.3.3. Soient $X = \mathbb{R}$ et $T : X \longrightarrow X$ une application définie comme suit :

$$T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Il est clair que T is discontinue. Maintenant, considérons le polynôme

$$P(z) = z^2.$$

Il est facile de vérifier que $P(T) \equiv 0$ satisfait les conditions du Théorème 2.3.2, et 0 est un point fixe unique de $P(T)$ et T.

Dans le théorème suivant, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence d'un point fixe unique commun de deux applications qui ne sont pas continues et qui commutent.

Théorème 2.3.3. Soient T_1 et T_2 deux applications définies sur un espace de Banach $(X, \|.\|)$, P_1 et P_2 deux polynômes définis comme dans le Corollaire 2.3.1 tels que :

($\imath$) $\|P_1(T_1)(x) - P_2(T_2)(y)\| \leq \Phi_1(\|x - P_1(T_1)(x)\|, \|y - P_2(T_2)(y)\|, \|x - y\|) + \Phi_2(\|x - y\|)$.

Pour tous $x, y \in X$ avec Φ_1 et Φ_2 satisfont les hypothèses du Théorème 2.3.1 .

($\imath\imath$) $P_1(T_1) \circ T_1 = T_1 \circ P_1(T_1)$ et $P_2(T_2) \circ T_2 = T_2 \circ P_2(T_2)$.

($\imath\imath\imath$) $P_1(T_1) \circ P_2(T_2)$ est continu.

Alors, T_1 et T_2 admettent un point fixe commun et unique dans X.

Preuve

Soit x_0 un point arbitraire de X, nous définissons la suite x_n comme suit

$$x_n = \begin{cases} P_1(T_1)(x_{n-1}) \text{ si n est impair} \\ P_2(T_2)(x_{n-1}) \text{ si n est pair} \end{cases}$$

$x_n \neq x_{n-1}$ pour tout n.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_{2n} - x_{2n+1}\| &= \|P_1(T_1)(x_{2n}) - P_2(T_2)(x_{2n-1})\| \\ &\leq \Phi_1(\|x_{2n} - P_1(T_1)(x_{2n})\|, \|x_{2n-1} - P_2(T_2)(x_{2n-1})\|, \|x_{2n} - x_{2n-1}\|) + \\ &\Phi_2(\|x_{2n} - x_{2n-1}\|) \\ &= \Phi_1(\|x_{2n} - x_{2n+1}\|, \|x_{2n-1} - x_{2n}\|, \|x_{2n} - x_{2n-1}\|) + \Phi_2(\|x_{2n} - x_{2n-1}\|), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|x_{2n} - x_{2n+1}\| \leq \widetilde{\Phi_1}(\|x_{2n} - x_{2n+1}\|) + \Phi_2(\|x_{2n-1} - x_{2n}\|).$$

Ainsi,

$$(I - \widetilde{\Phi_1})(\|x_{2n} - x_{2n+1}\|) \leq \Phi_2(\|x_{2n-1} - x_{2n}\|).$$

Comme $(I - \widetilde{\Phi_1})$ est inversible et $(I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}$ est croissante, nous avons

$$\|x_{2n} - x_{2n+1}\| \leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2(\|x_{2n-1} - x_{2n}\|).$$

Par les propriétés de $(I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}$, Φ_2, nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_{2n} - x_{2n+1}\| &\leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2(I - \widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2(\|x_{2n-2} - x_{2n-1}\|) \\ &\leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(2)}\Phi_2^{(2)}(\|x_{2n-2} - x_{2n-1}\|). \end{aligned}$$

En outre,

$$\|x_{2n} - x_{2n+1}\| \leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(2n)}\Phi_2^{(2n)}(\|x_0 - x_1\|).$$

D'une manière similaire, nous pouvons montrer

$$\|x_{2n+1} - x_{2n+2}\| \leq (I - \widetilde{\Phi_1})^{-(2n+1)}\Phi_2^{(2n+1)}(\|x_0 - x_1\|).$$

Maintenant, il est facile d'observer que (x_n) est une suite de Cauchy. Soit $x_n \longrightarrow u$; alors la suite $x_{n_k} \longrightarrow u$; où $n_k = 2k-1$. Maintenant,

$$\begin{aligned}[P_1(T_1)\circ P_2(T_2)](u) &= [P_1(T_1)\circ P_2(T_2)](\lim_{k\longrightarrow+\infty} x_{n_k})\\ &= \lim_{k\longrightarrow+\infty} x_{n_{k+1}}\\ &= u.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $P_2(T_2)(u) = u$. Si $P_2(T_2)(u) \neq u$, alors

$$\begin{aligned}\|P_2(T_2)(u)-u\| &= \|P_2(T_2)(u) - [P_1(T_1)\circ P_2(T_2)](u)\|\\ &\leq \Phi_1(\|u-P_2(T_2)(u)\|, \|P_2(T_2)(u) - [P_1(T_1)\circ P_2(T_2)](u)\|, \|u-P_2(T_2)(u)\|)\\ &+ \Phi_2(\|u-P_2(T_2)(u)\|).\end{aligned}$$

Aussi les conditions sur Φ_1 donnent

$$\|P_2(T_2)(u)-u\| \leq \widetilde{\Phi}_1(\|u-P_2(T_2)(u)\|) + \Phi_2(\|u-P_2(T_2)(u)\|)$$

ce qui entraîne que

$$(I-\widetilde{\Phi_1})\|u-P_2(T_2)(u)\| \leq \Phi_2(\|u-P_2(T_2)(u)\|).$$

Comme $(I-\widetilde{\Phi_1})$ est inversible et $(I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}$ est croissante, nous avons :

$$\|P_2(T_2)(u)-u\| \leq (I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2(\|u-P_2(T_2)(u)\|).$$

Soit $H = (I-\widetilde{\Phi_1})^{-1}\Phi_2$, il est clair que H est croissante et

$$H(t) < t \text{ pour tout } t > 0.$$

Ainsi

$$\|P_2(T_2)(u)-u\| < \|P_2(T_2)(u)-u\|.$$

Ceci est une contradiction. Donc $P_2(T_2)(u) = u$.

Aussi

$$\|P_1(T_1)(u)-u\| = \|P_1(T_1)(u)\circ P_2(T_2)(u)-u\| = 0$$

ce qui montre que

$$P_1(T_1)(u) = u.$$

Maintenant, si $\Phi_1(0, 0, t_3) = 0 \ \ \forall t_3 > 0$, soit $v \neq u \in X$ tel que $P_1(T_1)(v) = v$,

alors

$$\begin{aligned}
\|v - u\| &= \|P_1(T_1)(v) - P_2(T_2)(u)\| \\
&\leq \Phi_1(\|v - P_1(T_1)(v)\|, \|u - P_2(T_2)(u)\|, \|v - u\|) + \Phi_2(\|v - u\|) \\
&= \Phi_1(0, 0, \|v - u\|) + \Phi_2(\|v - u\|) \\
&< \|v - u\|.
\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. Donc u est un point fixe unique de $P_1(T_1)$. Aussi, il est facile de vérifier que u est un point fixe unique de $P_2(T_2)$. Finalement, en utilisant l'assertion $(\imath\imath)$ du Corollaire 2.3.1, nous déduisons que u est un point fixe commun de T_1 et T_2 ce qui achève la preuve.$\square$

2.4 Applications : Convergence et stabilité de certains processus itératifs

Théorème 2.4.1. Ajoutons la condition

$$\Phi_1(t_1, 0, t_3) = 0, \ \textit{pour tous } t_1, t_3 > 0, \tag{$\star\star$}$$

aux hypothèses du Théorème 2.3.1, alors T est Φ_2-quasi-non expansive.

Preuve

Par le même théorème, nous avons montré que T admet un point fixe unique u. Soit $x \in X$ avec $x \neq u$, alors

$$\begin{aligned}
d(T(x), u) &\leq \Phi_1[d(x, T(x), 0, d(x, u)] + \Phi_2(d(x, u)) \\
&= 0 + \Phi_2(d(x, u)) = \Phi_2(d(x, u)).\square
\end{aligned}$$

En tenant compte de la preuve du Théorème 2.3.1, il est facile d'établir un résultat de convergence pour le processus d'itération de Picard.

Proposition 2.4.1. Soit (X, d) un espace métrique complet. Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, le processus d'itération de Piquard (1.5.1) converge vers le point fixe unique de T, pour tout $x_0 \in X$.

Par ailleurs, en utilisant le Théorème 2.4.1 avec ([141], Theorem 3.7), nous obtenons le résultat suivant pour la convergence de processus itératif de Mann et celui d'Ishikawa.

Proposition 2.4.2. Soient $(X, d, \oplus)$ un espace métrique convexe, $\{\alpha_n\}_n$ et $\{\beta_n\}_n$ deux suites réelles dans $[0, 1]$ telles que $\{\alpha_n\beta_n\}_n$ converge vers un certain nombre réel $x_0 \in X$. Sous les hypothèses du Théorème 2.4.1 avec Φ_2 continue. Alors, la suite d'Ishikawa donnée par (1.5.3) converge vers le point fixe unique de T. De plus, si $\{\beta_n\}_n$ est une suite constante égale à 0, l'itération de Mann donnée par (1.5.2) converge vers le même point fixe de T.

Dans le résultat suivant, nous établissons la presque stabilité du processus d'itération de Picard.

Corollaire 2.4.1. Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons que $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant les hypothèses du Thèorème 2.4.1 avec Φ_2 continue. Si z_0 est un point fixe unique de T et $x_0 \in X$ avec $x_{n+1} := T(x_n), n \in \mathbb{N}$ le processus d'itération de Picard et $\{y_n\}_n \subset X$. Définissons $\{\epsilon_n\}_n$ par

$$\epsilon_n := d(y_{n+1}, T(y_n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < \infty$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0$. En d'autre terme, le processus d'itération de Picard est presque T-stable.

Preuve Le résultat est établi en combinant le fait que T est Φ_2-quasi-non expansive avec le Théorème 4.5 in [141]. $\square$

Chapitre 3

Sur quelques points fixes des contractions généralisées avec des expressions rationnelles et applications

3.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions quelques résultats d'existence et d'unicité de points fixes pour une classe d'applications satisfaisant une inégalité faisant intervenir une expression rationnelle. Sous certaines conditions sur les paramètres de l'inégalité, le cadre Φ-quasi-non expansive de cette classe est établi. Ces résultats sont utilisés pour obtenir la convergence des processus itératifs de Mann et d'Ishikawa dans le cas des espaces métriques convexes.

3.2 Introduction et Notations

Le principe de contraction de Banach [13] a été le point de départ du développement d'un champ très intéressant qui est la théorie de point fixe et ses applications. Le travail de Banach a fourni une abstraction de la méthode classique d'approximations successives présentées par Liouville, employées par Cauchy et développées dans une première fois par E. Picard dans la preuve de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles vers la fin du 19ème siècle. Après presque un siècle, ce secteur est devenu un champ prospère pour plusieurs mathématiciens, entre autres [23, 36, 37, 39, 77, 65, 146, 151] (pour plus de détails voir également la bibliographie de l'ouvrage de référence [20]).

Au milieu des années 60, d'autres résultats de points fixes traitant des conditions contractives générales avec des expressions rationnelles ont été apparus. Les premiers travaux dans cette direction ont été établis par Dass et Gupta [39], M.S. Khan [77] et D.S. Jaggi [65]. Pour ces contributions, les auteurs ont exploité les cas continu et non continu des applications selon la nature de l'expression rationnelle. Pour une bonne lecture sur ce sujet, voir le papier pionnier de B.E. Rhoades [138] et les références qu'il contient.

Dans ce chapitre, nous établissons quelques résultats d'existence et d'unicité de points fixes d'une classe d'applications impliquant des expressions rationnelles générales en traitant les cas continu et non continus, ceci va nous permettre de prolonger le théorème de Khan [77]. D'autre part, en se basant sur notre résultat principal donné par le Théorème 3.3.1, nous vérifions le cadre Φ-quasi-non expansive de notre contexte et en utilisant les résultats de Ruiz[141], nous établissons la convergence des processus de Mann et d'Ishikawa et la presque stabilité du processus de Picard.

Définition 3.2.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \longrightarrow X$ est appelée une application de Picard s'il existe $x^\star \in X$ tel que $F(T) = \{x^\star\}$ et

$$T^n(x_0) \longrightarrow x^\star \quad \text{pour} \ \ \text{tout } x_0 \in X;$$

En d'autre termes, si l'itération de Picard converge vers le point fixe unique pour tout $x_0 \in X$.

Exemple 3.2.1. Soit (X, d) un espace métrique complet, les exemples suivants sont des applications de Picard.

1. (**Banach 1922**) [13] : Toute contraction T sur X ;
2. (**Edelstein 1962**) [46] : Toute contraction stricte T sur un espace métrique compact ;
3. (**Kannan 1968**) [68] : Toute application $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant la condition de Kannan ;
4. (**Boyd-Wong 1969**) [26] : Toute Φ-contraction T sur X ;
5. (**Meir-Keeler 1969**) [103] : Toute application $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant la condition de Meir-Keeler ;

6. (**Zamfirescu 1972**) [162] : Toute application $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant la condition de Zamfirescu.

Remarque 3.2.1. Nous notons que les conditions indiquées dans 1, 2 et 4 de l'exemple ci-dessus assurent que l'application T est continue pour n'importe quel point de X, ce qui n'est pas le cas pour les autres applications.

Exemple 3.2.2. Soient $(X, d) = (\mathbb{R}, |.|)$ et $T : X \longrightarrow X$ une application définie par

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 2, \\ -1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Alors, T est une application de Kannan car

$$d(T(x), T(y)) \leq 1 = \frac{1}{3}d(2, T(2)) \leq \frac{1}{3}d(x, T(x)) + \frac{1}{3}d(2, T(2)).$$

Mais il est facile d'observer que T n'est pas continue au point 2.

3.3 Résultats principaux

On commence nos résultats principaux par le théorème suivant

Théorème 3.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application continue satisfaisant la condition suivante

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{\Phi_1[d(x, T(x))]\Phi_2[d(x, T(y))] + \Phi_4[d(y, T(y)), d(y, T(x))]}{\Phi_2[d(x, T(y))] + \Phi_3[d(y, T(x))]} \tag{3.3.1}$$

pour tous $x, y \in X$. Ici, sans perte de généralité, nous supposons

$$\Phi_2[d(x, T(y))] + \Phi_3[d(y, T(x))] \neq 0, \tag{$\star$}$$

où

H1) $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_1^n(t) < +\infty$ avec Φ_1 croissante et $\Phi_2(t) = \Phi_3(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

H2) $\Phi_4 : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ et $\Phi_4(t_1, t_2) = 0$ si $t_1 = 0$ ou $t_2 = 0$.

Alors T est une application de Picard sur X.

Preuve. Nous montrons d'abord l'unicité. Supposons qu'ils existent $u, v \in X$ avec $u = T(u)$ et $v = T(v)$ satisfaisant $(\star)$ avec $u \neq v$. Alors

$$\begin{aligned} d(u,v) = d(T(u),T(v)) &\leq \frac{\Phi_1[d(u,T(u))]\Phi_2[d(u,T(v))] + \Phi_4[d(v,T(v)), d(v,T(u))]}{\Phi_2[d(u,T(v))] + \Phi_3[d(v,T(u))]} \\ &= \frac{\Phi_1[d(u,u)]\Phi_2[d(u,v)] + \Phi_4[d(v,v), d(v,u)]}{\Phi_2[d(u,v)] + \Phi_3[d(v,u)]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le fait que $d(u,v) \neq 0$ implique que $d(u,v) < 0$ ce qui est une contradiction et par conséquent $u = v$.

Pour montrer l'existence, nous choisissons $x_0 \in X$ et nous définissons la suite $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0)$. Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\Phi_1[d(x_{n-1},x_n)]\Phi_2[d(x_{n-1},x_{n+1})] + \Phi_4[d(x_n,x_{n+1}), d(x_n,x_n)]}{\Phi_2[d(x_{n-1},x_{n+1})] + \Phi_3[d(x_n,x_n)]}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \Phi_1[d(x_{n-1}, x_n)] \\ &\leq \Phi_1^{(2)}[d(x_{n-2}, x_{n-1})] \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \Phi_1^{(n)}[d(x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m > n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \Phi_1^{(n)}[d(x_0,x_1)] + \Phi_1^{(n+1)}[d(x_0,x_1)] + ... + \Phi_1^{(m-1)}[d(x_0,x_1)] \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_1^{(k)}[d(x_0,x_1)]. \end{aligned}$$

Comme $\Phi_1 \in \mathcal{C}_2$, dons

$$d(x_n, x_m) \longrightarrow 0 \text{ si } m, n \longrightarrow +\infty$$

ce qui montre que $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est une suite de Cauchy et comme X est complet, il existe $x^* \in X$ tel que $x_n \longrightarrow x^*$ si $n \longrightarrow +\infty$. En outre, la continuité de T donne :

$$x^* = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} T(T^n(x_0)) = T(x^*).$$

Donc x^* est un point fixe de T. $\square$

Remarque 3.3.1. Dans le cas où ils existent $x, y \in X$ pour lesquels $\Phi_2(d(x,T(y))) + \Phi_3(d(y,T(x))) = 0$, nous ajoutons l'assertion $d(T(x),T(y)) = 0$. Pour cette situation, l'existence du point fixe est évidente. De plus, nous obtenons $d(x,T(y)) = d(y,T(x)) = 0$ ce qui donne $y = T(x) = T(y)$ et par conséquent y est un point fixe de T.

Dans le théorème suivant, nous étudions l'existence et l'unicité de point fixe de T sans l'hypothèse de la continuité.

Théorème 3.3.2. Soit T une application définie sur un espace métrique complet (X,d). Sous les hypothèses **H1**) et **H2**) du Théorème 3.3.1 et, si l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. $\dfrac{\Phi_4(t_3,t_4)}{\Phi_3(t_4)} \leq \widetilde{\Phi}(t_3), \forall t_3, t_4 \in]0,+\infty[$

   où $\widetilde{\Phi} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ satisfaisant que $I - \widetilde{\Phi} : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est bijective et strictement croissante.

2. Φ_1, Φ_3 et $t \longrightarrow \Phi_4(.,t)$ sont continues au point 0 combiné avec la continuité de Φ_2 sur $]0,+\infty[$.

Alors, T est une application de Picard.

Preuve.

1. La partie unicité est évidente. Pour montrer l'existence, soit $x_0 \in X$, et $x_n = T^n(x_0), n \geq 1$. supposons que $x_n \neq x_{n+1}$. Alors par $(\star)$, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}),T(x_n)) \\ &\leq \frac{\Phi_1[d(x_{n-1},T(x_{n-1}))]\Phi_2[d(x_{n-1},T(x_n))] + \Phi_4[d(x_n,T(x_n)),d(x_n,T(x_{n-1}))]}{\Phi_2[d(x_{n-1},T(x_n))] + \Phi_3[d(x_n,T(x_{n-1}))]}, \\ &= \Phi_1[d(x_{n-1},T(x_{n-1}))], \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \Phi_1^{(n)}[d(x_0, x_1)].$$

Ainsi, pour $m > n$, nous déduisons que

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_1^{(k)}[d(x_0, x_1)].$$

Comme $\Phi_1 \in \mathcal{C}_2$, il s'en suit que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$, $(\; n, m \longrightarrow +\infty)$, ce qui montre que $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ est une suite de Cauchy. Mais (X, d) est complet, donc $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ converge vers un certain $x^* \in X$.

D'autre part, si $y \neq T(x)$, nous avons

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &\leq \frac{\Phi_1[d(x, T(x))]\Phi_2[d(x, T(y))] + \Phi_4[d(y, T(y)), d(y, T(x))]}{\Phi_2[d(x, T(y))] + \Phi_3[d(y, T(x))]} \\ &\leq \Phi_1[d(x, T(x))] + \frac{\Phi_4[d(y, T(y)), d(y, T(x))]}{\Phi_3[d(y, T(x))]} \\ &\leq \Phi_1[d(x, T(x))] + \widetilde{\Phi}[d(y, T(y))]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $y = T(x)$, nous obtenons que

$$d(T(x), T(y)) \leq \Phi_1[d(x, T(x))].$$

En combinant les deux cas, nous obtenons

$$d(T(x), T(y)) \leq \Phi_1[d(x, T(x))] + \widetilde{\Phi}[d(y, T(y))]$$

pour tous x, y. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} d(x^*, T(x^*)) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, T(x^*)) \\ &= d(x^*, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_n) + \Phi_1(d(x_{n-1}, T(x_{n-1}))) + \widetilde{\Phi}(d(x^*, T(x^*))). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d(x^*, T(x^*)) &\leq (I - \widetilde{\Phi})^{-1}[\Phi_1(d(x_{n-1}, x_n)) + d(x^*, x_n)] \\ &\leq (I - \widetilde{\Phi})^{-1}[\Phi_1(\Phi_1^{(n-1)} d(x_0, x_1)) + d(x^*, x_n)] \\ &= (I - \widetilde{\Phi})^{-1}[\Phi_1^{(n)}(d(x_0, x_1)) + d(x^*, x_n)]. \end{aligned}$$

Le fait que $I - \widetilde{\Phi}$ est bijective et strictement croissante implique que $I - \widetilde{\Phi}$ est continue avec $\widetilde{\Phi}(0) = 0$, donc $(I - \widetilde{\Phi})^{-1}$ est une application bijective, strictement croissante et continue. En utilisant ce qui précède avec $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$ et en faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$,, nous obtenons

$$d(x^*, T(x^*)) = 0.$$

Ce qui montre que

$$T(x^*) = x^*.$$

Ce qui donne le résultat du premier cas.

2. Par la même analyse donnée ci-dessus, supposons que $T(x^\star) \neq x^\star$. Alors

$$d(x_n, T(x^*)) \leq \frac{\Phi_1[d(x_{n-1}, x_n)]\Phi_2[d(x_{n-1}, T(x^*))] + \Phi_4[d(x^*, T(x^*)), d((x^*, x_n)]}{\Phi_2[d(x_{n-1}, T(x^*))] + \Phi_3[d(x^*, x_n)]}$$

En faisant tendre $n \longrightarrow \infty$ et d'après les hypothèses, on a $d(x^\star, T(x^\star)) \leq 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi $x^\star$ est un point fixe de T. ce qui achève la preuve de deuxième cas. $\square$

Exemple 3.3.1. Dans le cas où $\Phi_1(t) = kt, \Phi_2(t) = t, \Phi_4(t_1, t_2) = kt_1t_2$ et $\Phi_3(t) = t$ avec $0 \leq k < 1$, nous trouvons le théorème de point fixe de Khan [77].

Exemple 3.3.2. Soit $X = \{z \in \mathbb{C}/z = e^{i\theta}\ (0 \leq \theta \leq \pi)\}$ equippé par la métrique $d(x, y) = d(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = |\theta_1 - \theta_2|$. Soit $(0 \leq \alpha < 1)$ et soit T une application définie sur X satisfaisant que

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{\alpha d(x, T(x))(e^{d(x,T(y))} - 1) + (1 - cos(d(y, T(y))))(1 - cos(d(y, T(x))))}{(e^{d(x,T(y))} - 1) + ln(1 + d(y, T(x)))}$$

avec la condition $(\star)$. Alors T admet un point unique dans X.

3.4 Applications

Définition 3.4.1. Une fonction $\Phi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est appelée subadditive si pour tous $t_1, t_2 \in [0, +\infty[$, nous avons $\Phi(t_1 + t_2) \leq \Phi(t_1) + \Phi(t_2)$.

Théorème 3.4.1. Supposons que les hypothèses du Théorème 3.3.1 (resp. Théorème 3.3.2) sont satisfaites. Si en outre Φ_1 est une fonction subadditive avec $\Phi_1 \leq \min\{\Phi_2, \Phi_3\}$, alors T est Φ_2-quasi-non expansive.

Preuve. Nous avons prouver que T admet un point fixe unique x^*. Soit $x \in X$ avec $x \neq x^*$, alors

$$\begin{aligned} d(T(x), x^*) = d(T(x), T(x^*)) &\leq \frac{\Phi_1[d(x, T(x))]\Phi_2[d(x, x^*)] + \Phi_4[d(x^*, x^*), d(x^*, T(x))]}{\Phi_2[d(x, x^*)] + \Phi_3[d(x^*, T(x))]} \\ &= \frac{\Phi_1[d(x, T(x))]\Phi_2[d(x, x^*)]}{\Phi_2[d(x, x^*)] + \Phi_3[d(x^*, T(x))]}. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire donne

$$d(x, T(x)) \leq d(x, x^*) + d(x^*, T(x)).$$

Comme Φ_1 est croissante, il s'en suit que

$$\Phi_1(d(x, T(x))) \leq \Phi_1[d(x, x^*) + d(x^*, T(x))].$$

D'après la subadditivité de Φ_1, nous avons

$$\Phi_1(d(x, T(x))) \leq \Phi_1(d(x, x^*)) + \Phi_1(d(x^*, T(x))).$$

Le fait que $\Phi_1 \leq \min\{\Phi_2, \Phi_3\}$ donne que

$$\Phi_1(d(x, T(x))) \leq \Phi_2(d(x, x^*)) + \Phi_3(d(x^*, T(x))).$$

Par conséquent,

$$d(T(x), x^*) \leq \frac{\Phi_1[d(x, T(x))]\Phi_2[d(x, x^*)]}{\Phi_1[d(x, T(x))]} = \Phi_2[d(x, x^*)]$$

ce qui donne le résultat désiré. □

En utilisant le Théorème 3.4.1 combiné avec ([141], Theorem 3.7), nous obtenons le résultat suivant pour la convergence des processus itératifs de Mann et d'Ishikawa.

Proposition 3.4.1. Soient $(X, d, \oplus)$ un espace métrique convexe et $\{\alpha_n\}_n$ et $\{\beta_n\}_n$ deux suites réelles dans $[0, 1]$ telles que $\{\alpha_n \beta_n\}_n$ converge vers un certain nombre réel positif et soit $x_0 \in X$. Sous les hypothèses du Théorème 3.4.1 avec Φ_2 une fonction de comparaison continue. Alors, la suite d'Ishikawa donnée par (1.5.3) converge vers l'unique point fixe de T. En outre, si $\{\beta_n\}_n$ est une suite constante égale à 0, l'itération de Mann donnée par (1.5.2) converge vers le même point fixe unique de T.

Remarque 3.4.1. Notons que pour les itérations de Picard, Mann et Ishikawa, chacune d'elle a son avantage particulier. Le mérite de l'itération de Picard est qu'elle est simple. En outre, si nous faisons une erreur pendant le calcul de points fixes en utilisant ce processus, le point particulier (à quelle erreur est présentée) sera converti en un autre point initial là en ayant besoin plus de temps d'atteindre la solution mais ceci n'est pas vrai pour d'autres techniques.

On signale que pour le cas de la stabilité numérique, nous disons qu'un processus d'itération de point fixe est numériquement stable si une petite perturbation dans les données initiales induit une petite influence de la valeur calculée du point fixe.

Dans le résultat suivant, nous établissons le presque stabilité de l'itération de Picard.

Corollaire 3.4.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.4.1 avec Φ_2 est une fonction de comparaison continue. Si z_0 est l'unique point fixe de T. Soient $x_0 \in X$ et $x_{n+1} := T(x_n), n \in \mathbb{N}$ le processus d'itération de Picard. Soit $\{y_n\}_n \subset X$ et définissons $\{\epsilon_n\}_n$ par

$$\epsilon_n := d(y_{n+1}, T(y_n)) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < \infty$, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0$. En d'autre termes, le processus d'itération de Picard est presque T- stable.

Preuve. Le résultat est établi en combinant le fait que T est Φ_2-quasi-non expansive avec le Théorème 4.5 de [141]. $\square$

Chapitre 4

Théorèmes de points fixes pour les applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan

4.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous établissons des théorèmes de points fixes pour les applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan. Le résultat principal de notre travail est une extension du théorème de M.S. Khan (1976). Nous donnons également quelques conséquences.

4.2 Introduction et préliminaires

Le théorème de point fixe de Banach [13] (connu également par le principe de contraction de Banach) est un outil important dans l'analyse non linéaire. Il garantit l'existence et l'unicité de point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et fournit une méthode constructive pour trouver les points fixes. Diverses extensions de ce principe ont été faites jusqu'a nos jours, pour une bonne lecture sur ce sujet, nous citons, par exemple [22, 27, 71, 84, 103, 125, 128, 129, 143, 144] et les références qu'elles contiennent.

Récemment, Samet et al. [144] ont introduit le concept suivant.

Définition 4.2.1. Soient (X, d) un espace métrique, $f : X \longrightarrow X$ une application et $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ une fonction. On dit que f est α-admissible si pour tous $x, y \in X$, on a

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Longrightarrow \alpha(f(x), f(y)) \geq 1. \tag{4.2.1}$$

Pour quelques exemples concernant la classe des applications α-admissible et autres informations sur le sujet, nous pouvons consulter [10, 11, 84, 144].

Dans ce chapitre, nous présentons des nouveaux théorèmes de points fixes des applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan généralisant le Théorème 1.2.9 de B. Fisher et en s'appuyant sur les idées de [27, 125, 143], nous appliquons nos résulats principaux à la contraction de type intégrale.

4.3 Résultats principaux

Dans cette section, en introduisant la classe des applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan, nous allons étudier l'existence de points fixes pour cette classe via les applications α-admissibles.

Tous les applications $f : X \longrightarrow X$ qui serons considérées dans la suite de chapitre doivent satisfaire

$$\forall x, y \in X, x \neq y \Longrightarrow d(x, f(y)) + d(y, f(x)) \neq 0.$$

Définition 4.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$. L'application f est appelée une application (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan s'il existe deux fonctions $\psi \in \mathcal{C}_2$ et $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ satisfaisant la condition suivante :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tels que

$$\begin{gathered}\epsilon \leq \psi\left(\frac{d(x, f(x))d(x, f(y)) + d(y, f(y))d(y, f(x))}{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}\right) < \epsilon + \delta(\epsilon) \\ \Longrightarrow \alpha(x, y)d(f(x), f(y)) < \epsilon.\end{gathered} \tag{4.3.1}$$

Remarque 4.3.1. Il est facile de voir que si $f : X \longrightarrow X$ est une application (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan, alors

$$\alpha(x, y)d(f(x), f(y)) \leq \psi\left(\frac{d(x, f(x))d(x, f(y)) + d(y, f(y))d(y, f(x))}{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}\right), \tag{4.3.2}$$

pour tous $x, y \in X$.

Maintenant, nous allons annoncé notre premier résultat qui est un théorème d'existence de point fixe pour les applications (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan .

Théorème 4.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan. Supposons que

(i) f est α-admissible ;

(ii) Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$;

(iii) f est continue.

Alors f admet un point fixe dans X, c'est à dire, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Preuve. D'après (ii), il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$. Nous définissons la suite $\{x_k\}$ dans X par $x_{k+1} = f(x_k)$ pour tout $k \geq 0$. Si $x_{k_0} = x_{k_0+1}$ pour un certain k_0, alors x_{k_0} est un point fixe de f. supposons maintenant que $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le fait que f est α-admissible implique que

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1 \Longrightarrow \alpha(f(x_0), f(x_1)) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1.$$

Par induction, nous déduisons que

$$\alpha(x_k, x_{k+1}) \geq 1 \text{ pour tout } k = 0, 1, ... \tag{4.3.3}$$

Par (4.3.2) et (4.3.3) il s'en suit que $\forall k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &= d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \\ &\leq \alpha(x_{k-1}, x_k) d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(x_{k-1}, x_k) d(x_{k-1}, x_{k+1}) + d(x_k, x_{k+1}) d(x_k, x_k)}{d(x_{k-1}, x_{k+1}) + d(x_k, x_k)}\right) \\ &\leq \psi(d(x_{k-1}, x_k)), \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Inductivement, nous obtenons

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \psi^k(d(x_0, x_1)).$$

Maintenant, nous prouvons que $\{x_k\}$ est une suite de Cauchy. En tenant compte des propriétés de la fonction ψ, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k \geq n(\epsilon)} \psi^k(d(x_0, x_1)) < \epsilon.$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m > n(\epsilon)$. En appliquant l'inégalité triangulaire à plusieurs reprises, nous avons

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \psi^k(d(x_0, x_1)) \\ &\leq \sum_{k \geq n(\epsilon)} \psi^k(d(x_0, x_1)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons que $\{x_k\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet (X, d). Ainsi, il existe $u \in X$ tel que $\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k = u$. Comme f est continue, alors

$$u = \lim_{k \longrightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \longrightarrow \infty} f(x_k) = f(\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k) = f(u),$$

ceci montre que $u \in X$ est un point fixe de f ce qui complète la preuve.□

Dans le théorème suivant, nous allons établir un résulat de point fixe sans l'hypothèse de continuité sur l'application f.

Théorème 4.3.2. Soient(X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application (α, ψ)-Meir-Keeler-Khan. Supposons que

$(\imath)$ f est α-admissible ;

$(\imath\imath)$ Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$;

$(\imath\imath\imath)$ Si $\{x_k\}$ est une suite dans X tel que $\alpha(x_k, x_{k+1}) \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x_k \longrightarrow x \in X$ quand $k \longrightarrow \infty$ alors $\alpha(x_k, x) \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Preuve. D'après la preuve du Théorème 4.3.1, nous obtenons que la suite $\{x_k\}$ définie dans X par $x_{k+1} = f(x_k)$ pour tout $k \geq 0$ converge à un certain $u \in X$. Maintenant, en utilisant (4.3.3) combiné avec la condition (iii), nous avons $\alpha(x_k, u) \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Après, supposons que $d(u, f(u)) \neq 0$. En appliquant la Remarque 4.3.1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(f(x_k), u) + d(f(x_k), f(u)) \\ &\leq d(x_{k+1}, u) + \alpha(x_k, u) d(f(x_k), f(u)) \\ &\leq d(x_{k+1}, u) + \psi\left(\frac{d(x_k, f(x_k))d(x_k, f(u)) + d(u, f(u))d(u, f(x_k))}{d(x_k, f(u)) + d(u, f(x_k))}\right). \end{aligned}$$

Comme $\psi(t) < t$, nous obtenons

$$d(u, f(u)) < d(x_{k+1}, u) + \frac{d(x_k, f(x_k))d(x_k, f(u)) + d(u, f(u))d(u, f(x_k))}{d(x_k, f(u)) + d(u, f(x_k))}.$$

En faisant tendre $k \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, nous finissons avec

$$d(u, f(u)) \leq 0,$$

ce qui implique évidemment $d(u, f(u)) = 0$. Donc $u \in X$ est un point fixe de f, ce qui achève la preuve. $\square$

L'unicité de point fixe pour les applications α-admissibles exige habituellement quelques conditions supplémentaires sur les applications elles mêmes où sur les espaces sur lesquels elles sont définies. Une de ces conditions peut être définie comme suit :

(U1) Pour tous les points fixes x et y de l'application f, nous avons $\alpha(x, y) \geq 1$.

Alternativement, au lieu de la condition ci-dessus, la suivante peut être utilisée.

(U2) Pour tous les points fixes x et y de l'application f il existe $z \in X$ tel que $\alpha(x, z) \geq 1$ et $\alpha(y, z) \geq 1$.

Théorème 4.3.3. Ajoutons la condition (U1) aux hypothèses du Théorème 4.3.1 ou le Théorème 4.3.2, nous obtenons l'unicité de point fixe.

Preuve. L'existence d'un point fixe est évidente à partir de la preuve du Théorème 4.3.1(respectivement le Théorème 4.3.2). Supposons que l'application f admet plus d'un point fixe et soient u et v sont deux d'entre eux tels que $u \neq v$. Alors la condition (U1) implique $\alpha(u, v) \geq 1$. Par la Remarque 4.3.1 nous avons

$$\begin{aligned} d(u, v) &\leq \alpha(u, v) d(u, v) = \alpha(u, v) d(f(u), f(v)) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(u, f(u)) d(u, f(v)) + d(v, f(v)) d(v, f(u))}{d(u, f(v)) + d(v, f(u))}\right) = \psi(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

à cause de fait que $u = f(u)$ et $v = f(v)$ et par la définition de la fonction ψ. Alors, $d(u, v) = 0$, ce qui complète la preuve de l'unicité. $\square$

Théorème 4.3.4. Ajoutons la condition (U2) aux hypothèses du Théorème 4.3.1 ou le Théorème 4.3.2, nous obtenons l'unicité de point fixe.

Preuve. L'existence du point fixe est prouvé dans le Théorème 4.3.1(respectivement le Théorème 4.3.2). Pour montrer l'unicité, soient u et v deux points fixes de f avec $u \neq v$. Par la condition (U2) il existe $z \in X$ tel que

$$\alpha(u, z) \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha(v, z) \geq 1.$$

Définissons la suite $\{z_n\}$ dans X par $z_0 = z$, $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout $n \geq 0$. Comme f est $\alpha-$admissible, et $u = f(u)$ et $v = f(v)$, nous obtenons

$$\alpha(u, z_n) \geq 1 \text{ et } \alpha(v, z_n) \geq 1, \text{ pour tout } n. \tag{4.3.5}$$

Par la Remarque 4.3.1, nous avons

$$\begin{aligned} d(u, z_{n+1}) &= d(f(u), f(z_n)) \leq \alpha(u, z_n) d(f(u), f(z_n)) \\ &\leq \psi\left(\frac{d(u, f(u))d(u, f(z_n)) + d(z_n, f(z_n))d(z_n, f(u))}{d(u, f(z_n)) + d(z_n, f(u))}\right) \\ &= \psi\left(\frac{d(z_n, z_{n+1})d(z_n, u)}{d(u, z_{n+1}) + d(z_n, u)}\right). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

L'inégalité triangulaire donne,

$$d(z_n, z_{n+1}) \leq d(u, z_{n+1}) + d(z_n, u),$$

et donc,

$$\frac{d(z_n, z_{n+1})d(z_n, u)}{d(u, z_{n+1}) + d(z_n, u)} \leq d(z_n, u).$$

Comme ψ est croissante, nous déduisons

$$d(u, z_{n+1}) \leq \psi\left(\frac{d(z_n, z_{n+1})d(z_n, u)}{d(u, z_{n+1}) + d(z_n, u)}\right) \leq \psi(d(z_n, u)).$$

Itérativement, cette inégalité implique

$$d(u, z_{n+1}) \leq \psi^{n+1}\left(d(u, z_0)\right), \tag{4.3.7}$$

pour tout n. Faisant tendre $n \to \infty$ dans (4.3.7), nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, u) = 0. \tag{4.3.8}$$

D'une manière similaire, on peut montrer

$$\lim_{n\to\infty} d(z_n, v) = 0. \tag{4.3.9}$$

Par l'unicité de la limite, nous obtenons $u = v$ ce qui complète la preuve.$\square$

Dans le Théorème 4.3.2, si nous prenons $\psi(t) = \lambda t$ où $\lambda \in]0, 1[$, et $\alpha(x, y) = 1$ pour tous $x, y \in X$, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta'(\epsilon) > 0$ tel que

$$\begin{array}{c} \frac{1}{\lambda}\epsilon \leq \frac{d(x,f(x))d(x,f(y)) + d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y)) + d(y,f(x))} < \frac{1}{\lambda}\epsilon + \delta'(\epsilon) \\ \Longrightarrow d(f(x),f(y)) < \epsilon. \end{array} \tag{4.3.10}$$

Alors f admet un point fixe unique $u \in X$. En outre, pour tout $x_0 \in X$, la suite $\{f^n(x_0)\}$ converge vers u.

Remarque 4.3.2. Soit $\mu \in]0,1[$. Choisissons $\lambda_0 \in]0,1[$ avec $\lambda_0 > \mu$. Fixons $\epsilon > 0$. Si nous prenons

$$\delta'(\epsilon) = \epsilon(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_0})$$

dans le Corollaire 4.3.1 et nous supposons que

$$\frac{1}{\lambda_0}\epsilon \leq \frac{d(x,f(x))d(x,f(y)) + d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y)) + d(y,f(x))} < \frac{1}{\lambda_0}\epsilon + \delta'(\epsilon),$$

Alors, d'après la condition (Kh), il s'en suit que

$$\begin{array}{rcl} d(f(x),f(y)) & \leq & \mu\frac{d(x,f(x))d(x,f(y)) + d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y)) + d(y,f(x))} \\ & < & \mu(\frac{1}{\lambda_0}\epsilon + \delta'(\epsilon)) \\ & = & \mu(\frac{1}{\lambda_0}\epsilon + \epsilon(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda_0})) \\ & = & \epsilon. \end{array}$$

Donc (4.3.10) est satisfaite ce qui mettre le Théorème 1.2.9 une conséquence immédiate du Corollaire 4.3.1.

Maintenent, nous désignons par Ξ l'ensemble de toutes les applications $h : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ satisfaisant :

(i) h continue croissante ;

(ii) $h(0) = 0$ et $h(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Le corollaire suivant est donné dans [125].

Corollaire 4.3.2. [125] Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $h \in \Xi$ et $c \in]0,1[$ satisfaisant

$$h(d(f(x),f(y))) \leq c\; h(d(x,y)). \tag{4.3.11}$$

Alors f admet un point fixe unique $u \in X$ et pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f^n(x) = u$.

Remarque 4.3.3. Dans le cas où $h(x) = x$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, nous obtenons le principe de contraction de Banach [13]. Si $h(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$ où $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est une application Lebesgue mesurable et sommable (c'est dire d'intégrale finie) sur chaque sous-ensemble compact de $[0,+\infty[$, et pour tout $\epsilon > 0$, $\displaystyle\int_0^\epsilon \varphi(t)dt > 0$, alors nous obtenons le résultat de Branciari [27].

Exemple 4.3.1. Les fonctions positives suivantes h définies sur $[0,+\infty[$ sont croissantes, continues et satisfaisant $h(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

1. $h(x) = x^n \quad (n \geq 1)$;
2. $h(x) = \ln(1+x)$;
3. $h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$;
4. $h(x) = e^x - 1$;
5. $h(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ pour $x > 0$ et $h(0) = 0$ définie sur $[0,1]$;
6. $h(x) = \nu([0,x])$ où ν est la mesure de Radon positive définie sur les ensembles boréliens de $[0,+\infty[$ tels que $\nu([0,\epsilon]) > 0$ pour tout $\epsilon > 0$.

Remarque 4.3.4. Nous observons que le principe de contraction de Bannach peut être obtenu si nous prenons la mesure de Borel définie sur les σ-algèbres des ensembles de Borel de $[0,+\infty[$ dans la fonction (6) de l'exemple précedent, tandis que le cas du résultat de Branciari peut être établi en prenant la mesure de Radon donnée par l'intégrale de fonction mesurable positive.

Remarque 4.3.5. Il est facile de voir que chaque contraction satisfait (4.3.11) avec $h(x) = x$, mais l'inverse est, en général, faut. En outre, soit

$$X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \bigcup \{0\},$$

équippé par la métrique usuelle $d(x,y) = |x-y|$ sur $\mathbb{R}$ et $f : X \longrightarrow X$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Un calcul simple montre f satisfait (4.3.11) en prenant $c = \dfrac{1}{2}$ et h est la fonction (5) dans l'exemple 6.3.1, mais malheureusement f n'est pas une contraction (stricte) car

$$\sup_{\{x,y \in X / x \neq y\}} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)} = 1,$$

(pour plus de détails, voir [27]).

4.4 Conséquences

Dans cette section, en s'appuyant sur l'idée de B. Samet [143], nous allons montrer que le Corollaire 4.3.1 ainsi que la Remarque 4.3.2 nous permettrons d'obtenir une version intégrale du résultat de Fisher [47].

Nous commençons par le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. Soient (X,d) un espace métrique complet, $f : X \longrightarrow X$ une application et soit $\lambda \in]0,1[$. Supposons qu'il existe une fonction $\rho : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ satisfaisant les conditions suivantes

(i) $\rho(0) = 0$ et $\rho(t) > 0$ pour tout $t > 0$;

(ii) ρ est croissante et continue à droite ;

(iii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta'(\epsilon) > 0$ tel que

$$\frac{1}{\lambda}\epsilon \leq \rho\left(\frac{d(x,f(x))d(x,f(y)) + d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y)) + d(y,f(x))}\right) < \frac{1}{\lambda}\epsilon + \delta'(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow \rho\left(\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))\right) < \frac{1}{\lambda}\epsilon,$$

pour tout $x, y \in X$.

Alors (4.3.10) is satisfaite.

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $\rho\left(\dfrac{1}{\lambda}\epsilon\right) > 0$, par (iii), il existe $\theta > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right) \leq \rho\left(\frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}\right) < \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right)+\theta \\ \Longrightarrow \rho\left(\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))\right) < \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right).\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

D'après la continuité à droite de ρ, il existe $\delta' > 0$ tel que

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon+\delta'\right) < \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right)+\theta.$$

Fixons $x, y \in X$ tels que

$$\frac{1}{\lambda}\epsilon \leq \frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))} < \frac{1}{\lambda}\epsilon+\delta'.$$

Comme ρ est croissante, nous obtenons

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right) &\leq \rho\left(\frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}\right) \\ &< \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon+\delta'\right) < \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right)+\theta.\end{aligned}$$

Alors, par (4.4.1), nous avons

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))\right) < \rho\left(\frac{1}{\lambda}\epsilon\right),$$

ce qui implique que $d(f(x),f(y)) < \epsilon$. Alors (4.3.10) est satisfaite ce complète la preuve. □

Corollaire 4.4.1. Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Soit $h \in \Xi$ tel que , pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta'(\epsilon)$ avec

$$\frac{1}{\lambda}\epsilon \leq h\left(\frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}\right) < \frac{1}{\lambda}\epsilon+\delta'(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow h\left(\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))\right) < \frac{1}{\lambda}\epsilon.$$

Alors (4.3.10) est satisfaite.

Preuve. La preuve découle immédiatement du Théorème 4.4.1, car chaque fonction continue $h : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est continue à droite.

Comme conséquence de ce corollaire, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Corollaire 4.4.2. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Soit $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction localement intégrable telle que $\int_0^t \varphi(s)ds > 0$ pour tout $t > 0$. Supposons que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta'(\epsilon)$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\epsilon \leq \int_0^{\frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}} \varphi(t)dt < \frac{1}{\lambda}\epsilon + \delta'(\epsilon) \\ \Longrightarrow \int_0^{\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt < \frac{1}{\lambda}\epsilon. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Alors (4.3.10) est satisfaite.

Maintenant, nous pouvons obtenir une version intégrale du résultat de Khan.

Corollaire 4.4.3. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Soit $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction localement intégrable telle que $\int_0^t \varphi(s)ds > 0$ pour tout $t > 0$ et soit $\lambda \in]0, 1[$. Supposons que f satisfait la condition suivante.
Pour tous $x, y \in X$,

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt \leq \mu' \int_0^{\frac{d(x,f(x))d(x,f(y))+d(y,f(y))d(y,f(x))}{d(x,f(y))+d(y,f(x))}} \varphi(t)dt \tag{4.4.3}$$

où $\mu' \in]0, 1[$. Alors f admet un point fixe unique $u \in X$. En outre, pour tout $x \in X$, la suite $\{f^n(x)\}$ converge vers u.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Il est facile d'observer que (4.4.2) est satisfait pour $\delta'(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\lambda}(\frac{1}{\mu'} - 1)$. Alors (4.3.10) est satisfait, ce qui prouve l'existence et l'unicité du point fixe.$\square$

Remarque 4.4.1. Notons que le Théorème 1.2.9 peut être obtenir à partir du Corollaire 4.4.3 en prenant $\varphi \equiv 1$ et $\mu' = \frac{\mu}{\lambda}$ où $\lambda \in]0, 1[$ et $\lambda > \mu$.

Chapitre 5

Théorème de point fixe pour la contraction de type Meir-Keeler via l'expression de Gupta-Saxena

5.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous établissons un nouveau théorème de point fixe pour une contraction de type Meir-Keeler par l'intermédiaire de l'expression rationnelle de Gupta-Saxena, ce qui nous permet d'étendre et de généraliser leur résultat principal [57]. Comme application, nous tirons quelques points fixes pour les applications de type intégrale .

5.2 Introduction

Il est bien connu que le principe de contraction de Banach [13] a été le point de départ de grandes découvertes et des progrès en mathématiques en général et en analyse non linéaire en particulier. Ce principe a attiré un grand nombre de chercheurs au cours des dernière années et qui ont enrichi la littérature par plusieurs extensions en utilisant de diverses contractions généralisées, pour plus de détails, nous orientons le lecteur vers les travaux ([5, 6, 22, 27, 71, 78, 84, 125, 128])..

Dans ce chapitre, nous établissons un nouveau théorème de point fixe pour les applications de type Meir-Keeler impliquant l'expression rationnelle de Gupta-Saxena ce qui nous permet d'étendre le Théorème 1.2.4 dans le cas où $a, b, c \in]0, \frac{1}{3}[$. Aussi, nous appliquons nos résultats théoriques aux contractions de type intégrale.

5.3 Résultats principaux

Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 5.3.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue satisfaisant la condition suivante.
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\begin{aligned}&3\epsilon \leq \frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y) < 3\epsilon + \delta(\epsilon)\\ &\Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon,\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

pour tous $x, y \in X$ où $x \neq y$. Alors f admet un point fixe unique $u \in X$. En outre, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = u$ pour tout $x_0 \in X$.

Preuve. Il est facile d'observer que la condition (5.3.1) implique que

$$\begin{aligned}&\text{Pour } x \neq y \text{ ou } \ f(y) \neq y\\ &d(f(x), f(y)) < \frac{1}{3}\left[\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right].\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Soit $x_0 \in X$ et considérons la suite $\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$. Nous allons prouver que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X. S'il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{l_0} = x_{l_{0+1}}$, alors x_{l_0} est un point fixe de f. Maintenant nous supposons que $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Définissons

$$s_n = d(x_n, x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant l'équation (5.3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} s_n &= d(f(x_{n-1}), f(x_n))\\ &< \frac{1}{3}\frac{(1 + d(x_{n-1}, x_n))d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_{n-1}, x_n)} + \frac{1}{3}\frac{d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)} + \frac{1}{3}d(x_{n-1}, x_n)\\ &= \frac{2}{3}d(x_n, x_{n+1}) + \frac{1}{3}d(x_{n-1}, x_n)\\ &= \frac{2}{3}s_n + \frac{1}{3}s_{n-1}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$s_n < s_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est à dire, la suite $\{s_n\}$ est décroissante. Alors, s_n converge vers un certain $s > 0$ et de plus $s_n \geq s, \forall n \geq 0$. Nous avons aussi $2s_n + s_{n-1} \longrightarrow 3s$ quand $n \longrightarrow +\infty$. D'après l'équation (5.3.1), pour $s > 0$ il existe $\delta(s) > 0$ tel que

$$3s \leq 2s_n + s_{n-1} < 3s + \delta(s),$$

ce qui implique

$$d(f(x_{n-1}), f(x_n)) = d(x_n, x_{n+1}) = s_n < s,$$

ceci est une contradiction avec $s_n \geq s$. Ainsi, nous déduisons que

$$s_n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Maintenant, Soit

$$\delta'(\epsilon) = \min\{\delta(\frac{\epsilon}{7}), \frac{\epsilon}{7}, 1\}.$$

Par la convergence de la suite $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ vers 0, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_l, x_{l+1}) < \frac{\delta'(\epsilon)}{6}, \forall \ l \geq k_0. \tag{5.3.3}$$

Maintenant, nous définissons l'ensemble Ω par

$$\Omega = \{x_p | \quad p \geq k_0, \quad d(x_p, x_{k_0}) < \frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}\}.$$

Nous allons prouver que

$$f(\Omega) \subset \Omega. \tag{5.3.4}$$

Clairement, pour $\gamma \in \Omega$ il existe $p \geq k_0$ tel que $\gamma = x_p$ et $d(x_p, x_{k_0}) < \frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}$. Si $p = k_0$, nous avons $f(\gamma) = x_{k_0+1} \in \Omega$ par (5.3.3). Alors, nous allons supposer que $p > k_0$. Nous distinguons deux cas

1. **Premier cas :** supposons que

$$\frac{3\epsilon}{7} \leq d(x_p, x_{k_0}) < \frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}. \tag{5.3.5}$$

Premièrement, nous allons montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{7} &\leq \frac{1}{3}\frac{(1 + d(x_p, x_{p+1}))d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{1 + d(x_p, x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p, x_{p+1})d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{d(x_p, x_{k_0})} + \frac{1}{3}d(x_p, x_{k_0}) \\ &< \frac{\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Par l'équation (5.3.5), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{7} &\leq \frac{1}{3}d(x_p, x_{k_0})\\ &\leq \frac{1}{3}\frac{(1+d(x_p,x_{p+1}))d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{1+d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p,x_{p+1})d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}d(x_p,x_{k_0}).\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

D'ailleurs par l'utilisation des équations (5.3.3) et (5.3.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\frac{(1+d(x_p,x_{p+1}))d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{1+d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p,x_{p+1})d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}d(x_p,x_{k_0})\\ &\leq \frac{1}{3}d(x_{k_0},x_{k_0+1}) + \frac{2}{3}\frac{d(x_{k_0},x_{k_0+1})d(x_p,x_{p+1})}{d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}d(x_p,x_{k_0})\\ &< \frac{1}{3}\frac{\delta'(\epsilon)}{6} + \frac{2}{3}d(x_p,x_{p+1}) + \frac{1}{3}d(x_p,x_{k_0})\\ &< \frac{\delta'(\epsilon)}{18} + \frac{2}{3}\frac{\delta'(\epsilon)}{6} + \frac{1}{3}(\frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3})\\ &= \frac{\epsilon}{7} + \frac{5\delta'(\epsilon)}{18}\\ &< \frac{\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}.\end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\frac{(1+d(x_p,x_{p+1}))d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{1+d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p,x_{p+1})d(x_{k_0},x_{k_0+1})}{d(x_p,x_{k_0})} + \frac{1}{3}d(x_p,x_{k_0})\\ &< \frac{\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}.\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Par les deux équations (5.3.7) et (5.3.8), nous déduisons que l'équations (5.3.6) est satisfaite. Dans ce cas, l'inégalité

$$\begin{aligned}\frac{3\epsilon}{7} &\leq \frac{(1+d(x_p,f(x_p)))d(x_{k_0},f(x_{k_0}))}{1+d(x_p,x_{k_0})} + \frac{d(x_p,f(x_p))d(x_{k_0},f(x_{k_0}))}{d(x_p,x_{k_0})} + d(x_p,x_{k_0})\\ &< \frac{3\epsilon}{7} + \delta'(\epsilon),\end{aligned}$$

implique par (5.3.1) que

$$d(f(x_p), f(x_{k_0})) < \frac{\epsilon}{7}. \tag{5.3.9}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité triangulaire combinée avec (5.3.3) et (5.3.9), nous obtenons que

$$\begin{aligned} d(f(x_p), x_{k_0}) &\leq d(f(x_p), f(x_{k_0})) + d(f(x_{k_0}), x_{k_0}) \\ &< \frac{\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{6} \\ &< \frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $f(\gamma) = f(x_p) = x_{p+1} \in \Omega$.

2. **Deuxième cas :** Supposons que

$$d(x_p, x_{k_0}) < \frac{3\epsilon}{7}. \tag{5.3.10}$$

D'après (5.3.2), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} d(f(x_p), x_{k_0}) &\leq d(f(x_p), f(x_{k_0})) + d(f(x_{k_0}), x_{k_0}) \\ &< \frac{1}{3}\frac{(1 + d(x_p, x_{p+1}))d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{1 + d(x_p, x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p, x_{p+1})d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{d(x_p, x_{k_0})} \\ &+ \frac{1}{3}d(x_p, x_{k_0}) + d(x_{k_0+1}, x_{k_0}) \\ &\leq \frac{1}{3}\frac{d(x_p, x_{p+1})d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{1 + d(x_p, x_{k_0})} + \frac{1}{3}\frac{d(x_p, x_{p+1})d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{d(x_p, x_{k_0})} \\ &+ \frac{1}{3}d(x_p, x_{k_0}) + \frac{4}{3}d(x_{k_0+1}, x_{k_0}). \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

D'autre part, en utilisant (5.3.3), nous avons

$$\frac{d(x_{k_0}, x_{k_0+1})}{1 + d(x_p, x_{k_0})} \leq d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) < \frac{\delta'(\epsilon)}{6} < 1.$$

Nous considérons les deux situations suivantes

(i) Si $d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \leq d(x_{k_0}, x_p)$, alors (5.3.11) donne

$$d(f(x_p), x_{k_0}) < \frac{1}{3}d(x_p, x_{p+1}) + \frac{1}{3}d(x_p, x_{p+1}) + \frac{1}{3}d(x_p, x_{k_0}) + \frac{4}{3}d(x_{k_0+1}, x_{k_0}).$$

D'après (5.3.3) et (5.3.10), nous déduisons que

$$\begin{aligned} d(f(x_p), x_{k_0}) &< \frac{2}{3}(\frac{\delta'(\epsilon)}{6}) + \frac{1}{3}(\frac{3\epsilon}{7}) + \frac{4}{3}(\frac{\delta'(\epsilon)}{6}) \\ &= \frac{\delta'(\epsilon)}{3} + \frac{\epsilon}{7} \\ &< \frac{\delta'(\epsilon)}{3} + \frac{3\epsilon}{7}. \end{aligned}$$

(ii) Si $d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) > d(x_{k_0}, x_p)$, alors

$$\begin{aligned} d(f(x_p), x_{k_0}) &\leq d(x_{p+1}, x_p) + d(x_p, x_{k_0}) \\ &< d(x_{p+1}, x_p) + d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \\ &< \frac{\delta'(\epsilon)}{6} + \frac{\delta'(\epsilon)}{6} \\ &= \frac{\delta'(\epsilon)}{3} \\ &< \frac{\delta'(\epsilon)}{3} + \frac{3\epsilon}{7}. \end{aligned}$$

Dans les deux situations (i) et (ii), nous avons $f(\gamma) = f(x_p) = x_{p+1} \in \Omega$. Ainsi, (5.3.4) est satisfaite et

$$d(x_m, x_{k_0}) < \frac{3\epsilon}{7} + \frac{\delta'(\epsilon)}{3}, \quad \forall \quad m > k_0. \tag{5.3.12}$$

Maintenant, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n > k_0$, par (5.3.12), nous avons

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{k_0}) + d(x_n, x_{k_0}) < \frac{6\epsilon}{7} + \delta'(\epsilon) < \frac{6\epsilon}{7} + \frac{\epsilon}{7} = \epsilon.$$

Donc, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X.

Comme (X, d) est un espace métrique complet, alors il existe $u \in X$ tel que $x_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Le fait que $x_{n+1} = f(x_n)$ et la continuité de f implique que $u = f(u)$, c'est à dire u est un point fixe de f.

Pour montrer l'unicité, nous supposons que u' est un autre point fixe de f. De (5.3.2), il s'en suit que

$$\begin{aligned} d(u, u') = d(f(u), f(u')) &< \frac{1}{3}(\frac{1 + d(u,u)d(u',u')}{1 + d(u,u')}) + \frac{1}{3}\frac{d(u,u)d(u',u')}{d(u,u')} + \frac{1}{3}d(u,u'), \\ &= \frac{1}{3}d(u,u'), \end{aligned}$$

qui est une contradiction. Ce qui montre l'unicité du point fixe et achève la preuve du théorème. □

Maintenant, nous allons montrer que le résultat Gupta-Saxena [57], où $a, b, c \in]0, \frac{1}{3}[$, est un cas particulier du Théorème 5.3.1.

Corollaire 5.3.1. (Gupta-Saxena [57]) Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons que f satisfait :
$\forall x, y \in X, x \neq y,$

$$d(f(x), f(y)) \leq k\left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right), \quad (5.3.13)$$

où $k \in]0, \frac{1}{3}[$ est une constante. Alors f admet un point fixe unique $u \in X$. En outre, $\forall x \in X$, la suite $\{f^n(x)\}$ converge vers u.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Si nous prenons

$$\delta(\epsilon) = \epsilon(\frac{1}{k} - 3),$$

alors, nous avons à chaque fois que

$$3\epsilon \leq \frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y) < 3\epsilon + \delta = \frac{\epsilon}{k}.$$

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\leq k\left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right) \\
&< k(3\epsilon + \delta(\epsilon)) \\
&= 3k\epsilon + k\delta(\epsilon) \\
&= 3k\epsilon + \frac{k\epsilon}{k} - 3k\epsilon \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi la condition (5.3.1) du Théorème 5.3.1 est satisfaite.

Notons que comme, $k < \frac{1}{3}$, alors $\frac{\epsilon}{k} > 3\epsilon$. Ainsi la condition (5.3.1) du Théorème 5.3.1 est satisfaite ce qui achève la preuve. □

Notons que l'application contractante de Gupta-Saxena n'est pas une stricte contraction, mais k-contraction. Donc, le Théorème 5.3.1 est une extension de résultat de Gupta-Saxena .

5.4 Applications

Dans cette section, nous allons donner une version intégrale du résultat de Gupta-Saxena.

Nous commençons par le théorème suivant.

Théorème 5.4.1. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction $\rho : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant

(i) $\rho(0) = 0$ et $\rho(t) > 0$ pour tout $t > 0$;

(ii) ρ croissante et continue à droite ;

(iii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$3\epsilon \leq \rho\left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right) < 3\epsilon + \delta(\epsilon)$$
$$\Longrightarrow \rho\left(3d(f(x), f(y))\right) < 3\epsilon,$$

pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

Alors (5.3.1) est satisfaite.

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $\rho(3\epsilon) > 0$, par (iii), pour $\rho(3\epsilon)$ il existe $\theta > 0$ tel que

$$\rho\left(3\epsilon\right) \leq \rho\left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right) < \rho(3\epsilon) + \theta$$
$$\Longrightarrow \rho\left(3d(f(x), f(y))\right) < \rho(3\epsilon) \tag{5.4.1}$$

D'après la continuité à droite de ρ, il existe $\delta > 0$ tel que $\rho(3\epsilon + \delta) < \rho(3\epsilon) + \theta$. Fixons $x, y \in X, x \neq y$ tels que

$$3\epsilon \leq \frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y) < 3\epsilon + \delta.$$

Comme ρ est croissante, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \rho(3\epsilon) &\leq \rho\left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)\right) \\ &< \rho(3\epsilon + \delta) < \rho(3\epsilon) + \theta. \end{aligned}$$

Alors, par (5.4.1), nous avons :

$$\rho(3d(f(x), f(y))) < \rho(3\epsilon),$$

ce qui implique que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Alors (5.3.1) est satisfaite, ce qui achève la preuve. □

Maintenant, nous notons par Ξ l'ensemble de tous les applications $h : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ satisfaisantes :

(i) h continue et croissante et ;

(ii) $h(0) = 0$ et $h(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Corollaire 5.4.1. Soit (X, d) un espace métique et $f : X \longrightarrow X$. Supposons que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon)$ tel que

$$3\epsilon \leq h(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)) < 3\epsilon + \delta(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow h(3d(f(x), f(y))) < 3\epsilon,$$

pour tous $x, y \in X$, avec $x \neq y$ où $h \in \Xi$ est une fonction donnée. Alors (5.3.1) est satisfaite.

Preuve. Ceci découle immédiatement à partir du Théorème 5.4.1 car chaque fonction continue $h : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est continue à droite.

Comme conséquence de ce corollaire, nous avons un autre résultat.

Corollaire 5.4.2. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$. Soit $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction localement intégrable telle que $\int_0^t \varphi(s)ds > 0$ pour tout $t > 0$. Supposons que pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon)$ tel que

$$3\epsilon \leq \int_0^{\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y)} \varphi(t)dt < 3\epsilon + \delta(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{3d(f(x), f(y))} \varphi(t)dt < 3\epsilon. \tag{5.4.2}$$

Alors (5.3.1) est satisfaite.

Maintenant, nous somme en mesure d'obtenir une version intégrale du résultat de Gupta-Saxena .

Corollaire 5.4.3. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Soit $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction localement intégrable telle que $\int_0^t \varphi(s)ds > 0$ pour tout $t > 0$. Supposons que f satisfait la condition suivante.
Pour tout $x, y \in X, x \neq y$,

$$\int_0^{3d(f(x),f(y))} \varphi(t)dt \leq \mu \int_0^{\frac{(1+d(x,f(x)))d(y,f(y))}{1+d(x,y)} + \frac{d(x,f(x))d(y,f(y))}{d(x,y)} + d(x,y)} \varphi(t)dt, \tag{5.4.3}$$

où $\mu \in]0, 1[$. Alors f admet un point fixe unique $u \in X$. En outre, pour tout $x \in X$, la suite $\{f^n(x)\}$ converge vers u.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Il est facile de voir que (5.4.2) est satisfaite pour $\delta(\epsilon) = 3\epsilon(\frac{1}{\mu} - 1)$. Alors (5.3.1) est satisfaite, ce qui achève la preuve. □

Remarque 5.4.1. Notons que le résultat du Corollaire 5.3.1 peut être établi à partir du Corollaire 5.4.3 en prenant $\varphi \equiv 1$ et $\mu = 3k, k \in]0, \frac{1}{3}[$. Clairement, pour ce choix, (5.4.3) devient,

$$d(f(x), f(y)) \leq k \left(\frac{(1 + d(x, f(x)))d(y, f(y))}{1 + d(x, y)} + \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)} + d(x, y) \right).$$

qui est exactement la condition du Corollaire 5.3.1.

Chapitre 6

Sur quelques points fixes des applications $\alpha - \psi$ contractives généralisées avec des expressions rationnelles

6.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de points fixes pour une nouvelle classe d'applications contractives impliquant des expressions rationnelles, ce qui nous permet de généraliser plusieurs résultats connus dans la littérature et pour souligner la nouveauté de nos résultats principaux, nous considérons quelques exemples d'illustration.

6.2 Introduction et préliminaires

Définition 6.2.1. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application. On dit que f est une application $\alpha - \psi$ contractive s'il existe deux fonctions $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ et $\psi \in \mathcal{C}_2$ telles que

$$\alpha(x, y)d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)).$$

Les résultats principaux de [144] sont les théorèmes suivants de points fixes.

Théorème 6.2.1. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application $\alpha - \psi$ contractive . Supposons que

$(\imath)$ f est α-admissible ;

$(\imath\imath)$ Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$;

$(\imath\imath\imath)$ f est continue.

Alors, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Pour l'unicité, nous avons besoin de la condition supplémentaire suivante.

(H) Pour tous $x, y \in Fix(f)$, il existe $z \in X$ tel que $\alpha(z, x) \geq 1$ et $\alpha(z, y) \geq 1$.

Théorème 6.2.2. Ajoutons la condition(H) aux hypothèses du Théorème 6.2.1, on obtient l'unicité du point fixe.

Dans ce travail, nous introduisons une nouvelle notion des applications $\alpha - \psi$ contractives généralisées en utilisant des expressions rationnelles. Nous étudions l'existence et l'unicité de points fixes pour de telles applications, ce qui nous permet de prolonger de nombreux résultats connus dans la littérature. Ensuite, à partir de nos résultats de points fixes, le cas des applications cycliques est considéré. En plus, nous présentons des exemples pour illustrer les résultats principaux.

6.3 Résultats principaux

Nous commençons cette section par introduire le concept des applications $\alpha - \psi - K$.

Définition 6.3.1. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application. On dit que f est une application $\alpha - \psi - K$ s'il existe deux fonctions $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ et $\psi \in \mathcal{C}_2$ telles que pour tous $x, y \in X, x \neq y$, on a

$$\alpha(x, y)d(f(x), f(y)) \leq \psi(K(x, y)) \tag{6.3.1}$$

où

$$\begin{aligned} K(x, y) = \max\{ & d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}, \\ & \frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x, y)}, \frac{d(y, f(y))[1 + d(x, f(x))]}{[1 + d(x, y)]} \}. \end{aligned}$$

Remarque 6.3.1. Chaque application $\alpha - \psi$ contractive est une application $\alpha - \psi - K$.

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 6.3.1. Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons que $f : X \longrightarrow X$ est une application $\alpha - \psi - K$ satisfaisant les conditions suivantes :

$(\imath)$ f est α-admissible ;

$(\imath\imath)$ Il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$;

$(\imath\imath\imath)$ f est continue.

Alors, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Preuve. Par la condition $(\imath\imath)$ il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$. Définissons la suite $\{x_n\}$ dans X par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$. Si $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ pour certain n_0, alors $u = x_{n_0}$ est un point fixe de f. Supposons que $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout n. La condition $(\imath)$ entraîne que

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1 \Longrightarrow \alpha(f(x_0), f(x_1)) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1. \tag{6.3.2}$$

Par induction, on obtient

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1, \qquad \forall n = 0, 1, ... \tag{6.3.3}$$

D'après (6.3.1) et (6.3.3), on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \psi(K(x_{n-1}, x_n)) \tag{6.3.4}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
K(x_{n-1}, x_n) &= \max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, f(x_{n-1})) + d(x_n, f(x_n))}{2}, \\
&\frac{d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))}{2}, \frac{d(x_{n-1}, f(x_{n-1}))d(x_n, f(x_n))}{d(x_{n-1}, x_n)}, \\
&\frac{d(x_n, f(x_n))[1 + d(x_{n-1}, f(x_{n-1}))]}{[1 + d(x_{n-1}, x_n)]}\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2}, \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)}{2}, \\
&\frac{d(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n)}, \frac{d(x_n, x_{n+1})[1 + d(x_{n-1}, x_n)]}{[1 + d(x_{n-1}, x_n)]}\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2}, \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2}, d(x_n, x_{n+1})\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2}, d(x_n, x_{n+1})\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}. \qquad (6.3.5)
\end{aligned}$$

Ainsi (6.3.4) et (6.3.5) combiné avec le fait que ψ est croissante donne que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}). \qquad (6.3.5)$$

Si pour certain $n \geq 1$, on a $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1})$, d'après (6.3.5), on obtient que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) < d(x_n, x_{n+1}), \qquad (6.3.6)$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\max\{(d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} = d(x_{n-1}, x_n), \qquad (6.3.7)$$

En utilisant (6.3.5) et (6.3.7), on obtient que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)). \qquad (6.3.8)$$

Par induction, on obtient pour tout $n \geq 0$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1)). \qquad (6.3.9)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $k \geq 1$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq \sum_{p=n}^{n+k-1} \psi^p d(x_0, x_1) \\ &\leq \sum_{p=n}^{+\infty} \psi^p (d(x_0, x_1)) \longrightarrow 0 \, quand \, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (X, d). Comme (X, d) est complet, il existe $u \in X$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_n, u) = 0. \tag{6.3.10}$$

d'autre part, comme f est continue, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} d(x_{n+1}, f(u)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} d(f(x_n), f(u)) = 0. \tag{6.3.11}$$

D'après (6.3.10) et (6.3.11) et l'unicité de la limite, on en déduit que u est un point fixe de f, c'est à dire que , $f(u) = u$.$\square$

Dans ce qui suit nous énonçons un exemple d'illustration.

Exemple 6.3.1. Soit $X = \mathbb{R}$ équippé par la métrique usuelle $d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On considère l'application continue $f : X \longrightarrow X$ définie par

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{3}{2} & \text{si } x > 1, \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{6.3.12}$$

Si on définit la fonction $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x, y \in [0, 1]; \\ 0 & \text{si non}, \end{cases} \tag{6.3.13}$$

On observe que f est une application $\alpha - \psi - K$ avec $\psi(t) = \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \geq 0$. De plus, on a

$$\alpha(x, y) d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y) \leq \psi(K(x, y)), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

D'autre part, pour $x_0 = 1$, on a $\alpha(x_0, f(x_0)) = \alpha(1, f(1)) = \alpha(1, \frac{1}{2}) = 1$.

Le fait que f est α-admissible est trivial. Ainsi, toutes les hypothèses de Théorème 6.3.1 sont satisfaites. Alors, f admet un point fixe.

Remarque 6.3.2. Notons que le Théorème 6.3.1 ne garantit pas l'unicité du point fixe, en effet dans l'exemple ci-dessus f admet deux points fixes $u_1 = 0$ et $u_2 = \dfrac{3}{2}$.

Théorème 6.3.2. *Ajoutons la condition (H) aux hypothèses du Théorème 6.3.1, on obtient que u est l'unique point fixe de f.*

Preuve. Supposons que v est un autre point fixe de f. D'après (H), il existe $z \in X$ tel que

$$\alpha(z,u) \geq 1, \qquad \alpha(z,v) \geq 1. \tag{6.3.14}$$

Comme f est α-admissible, d'après (6.3.14), on a

$$\alpha(f^n(z),u) \geq 1, \qquad \alpha(f^n(z),v) \geq 1, \quad \forall n \geq 0. \tag{6.3.15}$$

Définissons la suite $\{z_n\}$ dans X par $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout $n \geq 0$ et $z_0 = z$ et supposons que $d(z_n,u) > 0$. D'après (6.3.15), pour tout n, on a

$$d(z_{n+1},u) = d(f(z_n),f(u)) \leq \alpha(z_n,u)d(f(z_n),f(u)) \leq \psi(K(z_n,u)). \tag{6.3.16}$$

D'autre part, on en déduit que

$$\begin{aligned} K(z_n,u) &= \max\{d(z_n,u), \frac{d(z_n,z_{n+1})}{2}, \frac{d(z_n,u)+d(u,z_{n+1})}{2}\} \\ &= \max\{d(z_n,u), \frac{d(z_n,u)+d(u,z_{n+1})}{2}\} \\ &\leq \max\{d(z_n,u), d(u,z_{n+1})\}. \end{aligned}$$

En utilisant (6.3.16) et le fait que ψ est croissante, on en déduit que

$$d(z_{n+1},u) \leq \psi(\max\{d(z_n,u), d(z_{n+1},u)\}), \tag{6.3.17}$$

pour tout n. Si $\max\{d(z_n,u), d(z_{n+1},u)\} = d(z_{n+1},u)$, d'après (6.3.17), on obtient que

$$d(z_{n+1},u) \leq \psi(d(z_{n+1},u)) < d(z_{n+1},u), \tag{6.3.18}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, on a $\max\{d(z_n,u), d(z_{n+1},u)\} = d(z_n,u)$, et

$$d(z_{n+1},u) \leq \psi(d(z_n,u)), \tag{6.3.19}$$

pour tout n. Ceci implique

$$d(z_n, u) \leq \psi^n(d(z_0, u)), \quad \forall n \geq 0. \tag{6.3.20}$$

Faisant tendre $n \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédante, on conclut que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(z_n, u) = 0. \tag{6.3.21}$$

D'une manière similaire, on peut montrer que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(z_n, v) = 0. \tag{6.3.22}$$

D'après (6.3.21) et (6.3.22), on en déduit que $u = v$. Ce qui montre que u est l'unique point fixe de f.$\square$

Dans la suite, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 6.3.2. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application. On dit que f est une application $\alpha - \psi - K^\star$ s'il existe deux fonctions $\alpha : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ et $\psi \in \mathcal{C}_2$ telles que pour tout $x, y \in X$, on a

$$\alpha(x, y)d(f(x), f(y)) \leq \psi(K^\star(x, y)), \tag{6.3.23}$$

où

$$\begin{aligned} K^\star(x, y) = &\max\{d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}, \\ &\frac{d(y, f(y))[1 + d(x, f(x))]}{2[1 + d(x, y)]}\}. \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, on va établir un résultat de point fixe pour les applications $\alpha - \psi - K^\star$ sans l'hypothèse de la continuité.

Théorème 6.3.3. Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons que $f : X \longrightarrow X$ est une application $\alpha - \psi - K^\star$ satisfaisant les conditions suivantes

$(\imath)$ f est α admissible ;

$(\imath\imath)$ il existe $x_0 \in X$ tel que $\alpha(x_0, f(x_0)) \geq 1$;

$(\imath\imath\imath)$ Si $\{x_n\}$ est une suite dans X tel que $\alpha(x_{n-1}, x_n) \geq 1$ pour tout n et $x_n \longrightarrow x \in X$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors, il existe une sous suite $\{x_{n(k)}\}$ tel que $\alpha(x_{n(k)}, x) \geq 1$ pour tout k.

Alors, il existe $u \in X$ tel que $f(u) = u$.

Preuve. D'après la preuve du Théorème 6.3.1, on sait que la suite $\{x_n\}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge pour certain $u \in X$. En tenant compte de (6.3.3) et en utilisant la condition $(\imath\imath\imath)$, on obtient l'existence de la sous suite $\{x_{n(k)}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $\alpha(x_{n(k)}, u) \geq 1$ pour tout k. Alors,

$$d(x_{n(k)+1}, f(u)) = d(f(x_{n(k)}), f(u)) \leq \alpha(x_{n(k)}, u)d(f(x_{n(k)}), f(u)) \leq \psi(K^\star(x_{n(k)}, u)). \tag{6.3.24}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} K^\star(x_{n(k)}, u) = \max\{&d(x_{n(k)}, u), \frac{d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(u, f(u))}{2}, \frac{d(x_{n(k)}, f(u)) + d(u, x_{n(k)+1})}{2}, \\ &\frac{d(u, f(u))(1 + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}))}{2[1 + d(x_{n(k)}, u)]}\}. \end{aligned}$$

Faisant tendre $k \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédante, on obtient

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} K^\star(x_{n(k)}, u) = \frac{d(u, f(u))}{2}. \tag{6.3.25}$$

Supposons que $d(u, f(u)) > 0$. D'après (6.3.25), pour k suffisamment grant, on a $K^\star(x_{n(k)}, u) > 0$, ce qui implique que $\psi(K^\star(x_{n(k)}, u)) < K^\star(x_{n(k)}, u)$. Ainsi, d'après (6.3.24), on obtient que

$$d(x_{n(k)+1}, f(u)) < K^\star(x_{n(k)}, u). \tag{6.3.26}$$

En faisant tendre $k \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité précédante et en utilisant (6.3.25), on obtient

$$d(u, f(u)) \leq \frac{d(u, f(u))}{2} \tag{6.3.27}$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, on a nécessairement $d(u, f(u)) = 0$, c'est à dire, $u = f(u)$.$\square$

Théorème 6.3.4. Ajoutons la condition (H) aux hypothèses de Théorème 6.3.3, on obtient que u est le point fixe unique de f.

Preuve. En utilisant les mêmes techniques de la preuve du Théorème 6.3.2, on peut facilement arriver aux résultats désirés. $\square$

6.4 Applications

Exemple 6.4.1. Considérons le problème aux bord d'une équation différentielle de deuxième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t)) \quad t \in [0,1]; \\ x(0) = x(1) = 0, \end{array} \right. , \tag{6.4.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue décroissante par rapport à la deuxième variable satisfaisant

($\imath$) Pour tout $t \in [0,1]$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \leq x_2$, on a

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 8\psi(|x_1 - x_2|),$$

où $\psi \in \mathcal{C}_1$.

Soit $C([0,1]$ l'espace de toutes les fonctions continues définies sur $[0,1]$. Il est connu que si cet espace est équippé par la métique $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |x_1(t) - x_2(t)|$ est un espace métrique complet.

Définissons la fonction de green associée a (6.4.1) par

$$G(s_1, s_2) = \left\{ \begin{array}{ll} s_1(1 - s_2) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1; \\ s_2(1 - s_1) & \text{si } 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq 1. \end{array} \right. \tag{6.4.2}$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in C([0,1])$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, on a

($\imath\imath$) $x_0(t) \leq \displaystyle\int_0^t G(s_1, s_2) f(s_2, x_0(s_2)) ds_2$.

Si ($\imath$) et ($\imath\imath$) sont satisfait, alors le problème (6.4.1) admet une solution unique $x^\star \in C([0,1])$.

Preuve. Il facile d'observer que $x^\star \in C([0,1])$ est la solution unique de (6.4.1) si et seulement si $x^\star$ est le point fixe unique de l'application $T : C([0,1] \longrightarrow C([0,1]$ définie par

$$Tx(t) = \int_0^1 G(s_1, s_2) f(s_2, x(s_2)) ds_2, \forall t \in [0,1].$$

Si nous définissons la fonction $\alpha : C([0,1]) \times C([0,1]) \longrightarrow [0, +\infty[$ par

$$\alpha(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } y(t) \geq x(t); \\ 0 & \text{so non.} \end{array} \right. \tag{6.4.3}$$

Ainsi T est une application $\alpha - \psi - K^\star$ car $\forall x_1, x_2 \in C([0,1])$, on a $\alpha(x_1,x_2)\|T(x_1) - T(x_2)\|_\infty \leq \psi(\|x_1 - x_2\|_\infty) \leq \psi(K^\star(x_1,x_2))$ (voir Theorem 4.1 de [144]). De plus, la condition (H) est satisfaite en prenant $z = \min\{x,y\}, x, y \in C([0,1]$. En appliquant le Théorème 6.3.4, on obtient le résultat désiré. $\square$

6.5 Conséquences immédiates

Dans cette section, en prenant $\alpha(x,y) = 1$ dans le Théorème 6.3.2, on peut obtenir de nombreux théorèmes de points fixes connus dans la littérature en tant que cas particuliers de notre cadre général.

le premier résultat dans cette direction est le Corollaire suivant

Corollaire 6.5.1. Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(K(x,y)), \forall (x,y) \in X \times X, x \neq y. \tag{6.5.1}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.2. (voir le principe de contraction de Banach [13]) Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y). \tag{6.5.2}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.3. (voir Berinde [22]) Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x,y)), \forall (x,y) \in X \times X, \tag{6.5.3}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.4. (voir Jaggi [65]) Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$ avec $\lambda_1+\lambda_2 < 1$ telles que pour tous $x, y \in X, x \neq y$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda_1 d(x,y) + \lambda_2 \frac{d(y, f(y))d(x, f(x))}{d(x,y)}. \tag{6.5.4}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.5. (voir Gupta-Saxena [57]) Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, \frac{1}{3}[$ telle que pour tous $x, y \in X, x \neq y$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \left(d(x,y) + \frac{d(y, f(y))d(x, f(x))}{d(x,y)} + \frac{d(y, f(y))(1 + d(x, f(x))}{1 + d(x,y)} \right). \tag{6.5.5}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.6. Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons qu'il existe $A, B, C, D, E \geq 0$ avec $A + 2B + 2C + D + E \in]0,1[$ telles que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq & Ad(x,y) + B[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] + C[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] + \\ & D\frac{d(x, f(x))d(y, f(y))}{d(x,y)} + E\frac{d(y, f(y))[1 + d(x, f(x))]}{1 + d(x,y)}, \end{aligned} \tag{6.5.41}$$

pour tous $(x,y) \in X \times X, x \neq y$.

Alors f admet un point fixe unique.

En prenant $\alpha(x,y) = 1$ dans le Théorème 6.3.4, le résultat suivant de point fixe peut être déduit immédiatement.

Corollaire 6.5.7. Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(K^\star(x,y)), \forall (x,y) \in X \times X, \tag{6.5.6}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Les théorèmes suivants de points fixes sont des conséquences immédiates du Corollaire 6.5.7.

Corollaire 6.5.8. (voir Karapinar-Samet [71]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(M(x, y)), \forall (x, y) \in X \times X, \tag{6.5.7}$$

où

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}\right\}.$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.9. (voir Karapinar-Samet [71]) soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}\right\}, \tag{6.5.8}$$

pour tous $(x, y) \in X$.

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.10. (voir Hardy-Rogers [61]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $A, B, C \geq 0$ avec $A + 2B + 2C \in]0, 1[$ telles que

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y) + B[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] + C[d(x, f(y)) + d(y, f(x))], \tag{6.5.9}$$

pour tous $(x, y) \in X \times X$.

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.11. (voir Kannan [68]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \tag{6.5.10}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.12. (voir Chatterjea [36]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]. \tag{6.5.11}$$

Alors f admet un point fixe unique.

Corollaire 6.5.13. (voir Dass-Gupta [39]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que pour tous $x, y \in X$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \left(d(x, y) + \frac{d(y, f(y))(1 + d(x, f(x)))}{1 + d(x, y)} \right). \tag{6.5.12}$$

Alors f admet un point fixe unique.

6.6 Cas des applications cycliques

Le papier de W. A. Kirk et al [81] qui s'occupe des applications de type $f : A_i \longrightarrow A_{i+1}, i = 1, 2, ..., p, (A_{p+1} = A_1)$, était un travail pionnier, car en introduisant la notion des applications cycliques, les auteurs donnent une extension de principe de contraction de Banach et de théorème de Caristi [32], il était le point de départ pour l'apparition de plusieurs résultats de points fixes pour les applications cycliques [2, 142]. Dans cette section, en utilisant le Théorème 6.3.4, des résultats de points fixes pour les applications cycliques sont obtenus.

Nous commençons par

Corollaire 6.6.1. Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

$(\imath)$ $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

$(\imath\imath)$ Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(K^\star(x, y)), \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.1}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Preuve. La preuve peut être obtenue par les même techniques de la preuve du Corollaire 3.18 dans [71]. □

Comme conséquence du Corollaire 6.6.1, nous avons les résultats du points fixes suivants.

Corollaire 6.6.2. (voir Karapinar-Samet [71]) Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

($\imath$) $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

($\imath\imath$) Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(M(x, y)), \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.2}$$

où

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}\right\}.$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Corollaire 6.6.3. (voir Pacurar-Rus [119]) Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

($\imath$) $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

($\imath\imath$) Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_2$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \psi(d(x, y)), \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.3}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Corollaire 6.6.4. (voir Kirk et al [81]) Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

($\imath$) $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

$(\imath\imath)$ Il existe une constante $\lambda \in]0, 1[$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.4}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Corollaire 6.6.5. Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

$(\imath)$ $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

$(\imath\imath)$ il existe une constante $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda [d(x, f(x)) + d(y, f(y)], \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.5}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Corollaire 6.6.6. Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet(X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

$(\imath)$ $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

$(\imath\imath)$ il existe une constante $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda [d(x, f(y)) + d(y, f(x)], \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.6}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Corollaire 6.6.7. Soient $\{A_i\}_{i=1}^2$ des sous ensembles non vides fermés d'un espace métrique complet (X, d) et $f : Y \longrightarrow Y$ une application, où $Y = A_1 \cup A_2$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites

$(\imath)$ $f(A_1) \subseteq A_2$ et $f(A_2) \subseteq A_1$;

$(\imath\imath)$ il existe une constante $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$ telle que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \left(d(x, y) + \frac{d(y, f(y))[1 + d(x, f(x))]}{1 + d(x, y)} \right), \forall (x, y) \in A_1 \times A_2. \tag{6.6.7}$$

Alors f admet un point fixe unique qui appartient à $A_1 \cap A_2$.

Définition 6.6.1. Soit $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et $f : X \to X$ une application. On dit que f est croissante par rapport à $\preceq$ si

$$x, y \in X,\ x \preceq y \Longrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

Définition 6.6.2. Soient $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné. Une suite $\{x_n\} \subset X$ est dite croissante par rapport à $\preceq$ si $x_n \preceq x_{n+1}$ pour tout n.

Définition 6.6.3. Soient $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et d une métrique sur X. On dit que $(X, \preceq, d)$ est régulier si pour chaque suite croissante $\{x_n\} \subset X$ telle que $x_n \to x \in X$ quand $n \to \infty$, il existe une sous suite $\{x_{n(k)}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $x_{n(k)} \preceq x$ pour tout k.

Nous avons le résultat suivant.

Corollaire 6.6.8. Soient $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et d une métrique sur X tel que (X, d) est complet et $f : X \to X$ une application croissante par rapport à $\preceq$ satisfaisant la condition suivante :

$$\alpha(x, y)d(f(x), f(y)) \leq \psi(K(x, y)), \tag{6.6.8}$$

pour tous $x, y \in X$ avec $x \succeq y$,

où

$$K(x,y) = \max\{d(x,y), \frac{d(x,f(x)) + d(y,f(y))}{2}, \frac{d(x,f(y)) + d(y,f(x))}{2}, \frac{d(x,f(x))d(y,f(y))}{d(x,y)}, \frac{d(y,f(y))[1 + d(x,f(x))]}{[1 + d(x,y)]}\}.$$

et $\psi \in \mathcal{C}_2$. Supposons aussi que les conditions suivantes sont satisfaites

(i) Il existe $x_0 \in X$ tel que $x_0 \preceq f(x_0)$;

(ii) f est continue où $(X, \preceq, d)$ est régulier.

Alors f admet un point fixe. De plus, si pour $x, y \in X$ il existe $z \in X$ tel que $x \preceq z$ et $y \preceq z$, nous avons l'unicité de point fixe.

La preuve est facile d'après ce qui suit :

Définissons l'application $\alpha : X \times X \to [0, \infty[$ par

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \preceq y \text{ ou } x \succeq y, \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$$

Nous sautons les détails qui peuvent être trouvé dans [71, 144].

Comme remarque finale, nous signalons le fait qu'on peut obtenir les analogues des résultats cités ci-dessus dans un ensemble partiellement ordonné en choisissant α d'une manière appropriée comme le corollaire précédant.

Chapitre 7

Quelques résultats de points fixes et application à la convergence de certains processus itératifs dans les espaces normés

7.1 Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence et l'unicité de points fixes pour une classe d'applications satisfaisant certaines expressions rationnelles sur des sous ensembles fermés, bornés et convexes ayant la structure normale dans un espace de Banach réflexif. Nous montrons en particulier que cette classe généralise celle introduite par B. Ray and S. P. Singh (Indian. J. Pure. Appl. Math., 9 (1978), 216-221). Comme application, nous étudions la convergence et la stabilité de quelques processus itératifs associées à ces applications.

7.2 Introduction et notations

Pour les cas des applications non expansives ou leurs variantes, la différence entre l'étude de l'existence de points fixes dans le cadre normé par rapport au cadre métrique est que dans le premier contexte, la géométrie des espaces joue un rôle primordial. la question est en générale hors de notre porté dû à sa difficulté. Les contributions significatives dans cette direction remonte aux travaux de W. A. Kirk et F. E. Browder (1965) et de nombreuses questions ouvertes qui lui sont associés sont toujours d'actualité.

Définition 7.2.1. Soient $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble de X. Une application T sur K est appelée non expansive si $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$.

L'ensemble des applications non expansives sur K est noté par Δ_K.

On signale que l'existence et l'unicité de points fixes pour ce type d'applications ne sont pas assurées en général. Cependant, quelques théorèmes de points fixes pour les applications non expansives ont été donnés par plusieurs auteurs (nous citons par exemple, [42, 79] et chapitre 3 de [21]).

Soient $(X, \|.\|)$ un espace normé et T une application sur X. Pour tout sous ensemble $A \subset X$, le diamètre de A qui sera noté par $\delta(A)$ est défini par

$$\delta(A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}.$$

Soient $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, nous définissons l'orbite d'ordre n de x par T comme suit :

$$O(x, n) = \{x, T(x), ..., T^n(x)\}.$$

L'orbite de x par T est défini par

$$O(x) = \{x, T(x), ...T^n(x), ...\}.$$

Définition 7.2.2. Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble de X. L'application $T : K \longrightarrow K$ est dite controlée orbitalement si $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall x \in X$ et pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, il existe $1 \leq k \leq n$ tel que

$$\|T^i(x) - T^j(x)\| \leq \|x - T^k(x)\|, \tag{7.2.1}$$

Remarque 7.2.1. Le nombre entier k indiqué dans la définition précédante peut être choisi indépendamment de i, j. En effet, Soit $n \geq 2$ et $x \in K$, supposons que pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, il existe un entier k (dépendant de i, j) tel que

$$\|T^i(x) - T^j(x)\| \leq \|x - T^{k_{i,j}}(x)\|.$$

Si nous notons $l = \max\{\|x - T^{k_{i,j}}(x)\|, i, j = 1, ..., n\}$, alors il existe $i_0, j_0 \in \{1, ..., n\}$ tels que $l = \|x - T^{k_{i_0,j_0}}(x)\|$, et par conséquent nous obtenons

$$\|T^i(x) - T^j(x)\| \leq \|x - T^{k_{i_0,j_0}}(x)\|,$$

pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ (ici k_{i_0,j_0} est indépendant de i et j).

Si T est contrôlée orbitalement, alors pour chaque $x \in K$ et $n \geq 2$, ils existent $1 \leq \beta_1^x \leq n$ et $2 \leq \beta_2^x \leq n$ tels que $\delta(O(x, n)) = \|x - T^{\beta_1^x}(x)\|$ et $\delta((O(T(x), n-1))) = \|T(x) - T^{\beta_2^x}(x)\|$. Nous désignons par $r_1^x(T)$ (resp. $r_2^x(T)$) le plus petit entier β_1^x (resp. β_2^x) tel que $\delta(O(x, n)) = \|x - T^{\beta_1^x}(x)\|$ (resp. $\delta(O(T(x), n-1)) = \|T(x) - T^{\beta_2^x}(x)\|$. Nous notons que $\delta(O(x, n)) \geq \delta(O(T(x), n-1))$.

L'ensemble des applications contrôlées orbitalement sur K sera noté par Ξ_K.

7.3 Résultats principaux

Tout d'abord, nous allons montrer que Ξ_K contient en particulier l'ensemble de toutes les applications non expansives Δ_K.

Proposition 7.3.1. Soient $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble borné de X. Alors $\Delta_K \subseteq \Xi_K$.

Preuve. Soient $T \in \Delta_K$ et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Si $x \in K$ et $i, j \in \{1, ..., n\}, j > i$, nous avons

$$\|T^j(x) - T^i(x)\| \leq \|T^{j-1}(x) - T^{i-1}(x)\| \leq .... \leq \|x - T^{j-i}(x)\|,$$

ce qui implique que T satisfait (7.2.1), ainsi $T \in \Xi_K$ ce qui donne le résultat. $\square$

Donnons maintenant la définition des applications quasi-contractions.

Définition 7.3.1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble de X. Une application T sur K est dite quasi-contraction s'il existe $\eta \in [0, 1[$ tel que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \eta \max\{\|x - y\|, \|x - T(x)\|, \|y - T(y)\|, \|x - T(y)\|, \|y - T(x)\|\},$$

pour tous $x, y \in K$.

L'ensemble des applications quasi-contraction sur K sera noté par Θ_K.

Proposition 7.3.2. Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble borné de X. Alors $\Theta_K \subseteq \Xi_K$.

Preuve. Si $T \in \Theta_K$ et $n \geq 2$. Soient $x \in K$ et $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi $T^i(x), T^j(x) \in O(T(x), n-1) \subset O(x,n)$ $(T^0(x) = x)$. Comme T est une application quasi-contraction sur K, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\|T^i(x) - T^j(x)\| &= \|T(T^{i-1}(x)) - T(T^{j-1}(x))\| \\
&\leq \eta \max\{\|T^{i-1}(x) - T^{j-1}(x)\|, \|T^{i-1}(x) - T^i(x)\|, \|T^{j-1}(x) - T^j(x)\|, \\
&\|T^{i-1}(x) - T^j(x)\|, \|T^{j-1}(x) - T^i(x)\|\} \\
&\leq \eta\delta(O(x,n)) < \delta(O(x,n)).
\end{aligned}$$

Ceci montre que (7.2.1) est satisfaite pour T et par conséquent $\Theta_K \subseteq \Xi_K$.$\square$

Lemme 7.3.1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble non vide de X. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, si $T \in \Delta_K$ et $x \in K$ tels que $\delta(O(x,n)) = \delta(O(T(x), n-1))$, alors $r_2^x(T) > r_1^x(T)$.

Preuve. Supposons que $r_2^x(T) \leq r_1^x(T)$. D'après les hypothèses, nous avons $\delta(O(x,n)) = \delta(O(T(x), n-1)) = \|T(x) - T^{r_2^x(T)}(x)\| = \|x - T^{r_1^x(T)}(x)\|$. Le fait que $T \in \Delta_K$ implique que $\delta(O(x,n)) = \delta(O(T(x), n-1)) = \|T(x) - T^{r_2^x(T)}(x)\| \leq \|x - T^{r_2^x(T)-1}(x)\|$ ce qui est une contradiction avec $r_1^x(T)$ qui est le plus petit nombre entier β_1^x tel que $\delta(O(x,n)) = \|x - T^{\beta_1^x}(x)\|$.$\square$

Soit P un polynôme réel donné par :

$$P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n \text{ avec } \lambda_i \geq 0, \lambda_1 > 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et K un sous ensemble non vide X. Soit $T : K \longrightarrow K$ une application.

Proposition 7.3.3. Si K est un sous ensemble non vide, borné et convexe dans X et $T \in \Xi_K$ tel que $r_2^x(T) > r_1^x(T)$ pour tout $x \in K$, alors $F(T) = F(P(T))$.

Preuve. L'inclusion $F(T) \subseteq F(P(T))$ est triviale. Montrons, maintenant l'inverse si $x \in K$ tel que $P(T)(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 T(x) + ... + \lambda_n T^n(x) = x$. Ainsi, $x \in co\{T(x), ..., T^n(x)\}$. Maintenant, supposons $\delta(O(x,n)) > 0$. Comme $\lambda_1 > 0$, alors $\lambda_0 \neq 1$, et par conséquent.

$$x = \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}T(x) + (1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})z,$$

où $z = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i T^{i+1}(x)$ avec $\sigma_i = \frac{\lambda_{i+1}}{(1-\lambda_0-\lambda_1)}$ pour tout $i = 1, ..., n-1$. Cependant, il est facile d'observer que $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 1$ (car $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$), ce qui implique $z \in co\{T^2(x), T^3(x), ..., T^n(x)\}$; ainsi

$$\begin{aligned}
\delta(O(x,n)) = \|x - T^{r_1^x(T)}(x)\| &= \|\frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}T(x) + (1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})z - T^{r_1^x(T)}(x)\| \\
&\leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\| + \\
&(1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})\|z - T^{r_1^x(T)}(x)\|, \\
&= \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\| + \\
&(1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})\|\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i T^{i+1}(x) - (\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i)T^{r_1^x(T)}(x)\|, \\
&\leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\| + \\
&(1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \|T^{i+1}(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\|, \\
&\leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\| + \\
&(1 - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)})(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i)\delta(O(x,n)).
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 1$, il s'en suit que,

$$\frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\delta(O(x,n)) \leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\|.$$

Ceci donne que $\delta(O(x,n)) = \|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\|$ et par conséquent $\delta(O(T(x), n-1)) = \|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\|$ ce qui contredit le fait que $r_2^x(T) > r_1^x(T)$. Ainsi $\delta(O(x,n)) = 0$ ce qui donne que $T(x) = x$ et par conséquent $x \in F(T)$.$\square$

Remarque 7.3.1. Nous signalons que la condition $\lambda_1 > 0$ est cruciale comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7.3.1. Soit $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par $T(x) = 1 - x$. Il est facile de voir que T est non expansive et $x_0 = \dfrac{1}{2}$ est le point fixe unique de T. Maintenant, nous considérons le polynôme $P(z) = \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}$. Alors

$$P(T) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$x \longmapsto P(T)(x) = x.$$

Dans ce cas, nous observons que $F(P(T)) = [0,1]$ et par conséquent nous avons $F(T) \subsetneq F(P(T))$.

Par les mêmes techniques de la preuve de la Proposition 7.3.3, nous montrons la proposition suivante.

Proposition 7.3.4. Si K est un sous ensemble non vide, borné et convexe dans un espace normé X et $T \in \Xi_K$ avec $k = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et tout $x \in K$, alors $F(T) = F(P(T))$.

Preuve. En effet, dans ce cas, la dernière inégalité dans la preuve de la Proposition 7.3.3 devient

$$\frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\delta(O(x,n)) \leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|T(x) - T^{r_1^x(T)}(x)\| \leq \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_0)}\|x - T(x)\|.$$

Ce qui donne que $\delta(O(x,n)) = \|x - T(x)\|$ et montre que $r_1^x(T) = 1$, en remplaçant $r_1^x(T)$ par 1 dans cette inégalité, nous obtenons $\delta(O(x,n)) = 0$. Ce qui donne le résultat désiré. $\square$

Maintenant, nous donnons l'important résultat préparatoire suivant.

Proposition 7.3.5. Soit K un sous ensemble non vide d'un espace normé X et soit T une application définie sur K satisfaisant pour tous $(x,y) \in K \times K, x \neq y$, si $y = T(x)$, nous avons nécessairement $x \neq T(y)$ combiné avec la condition suivante :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \frac{\Phi_1(\|x - T(x)\|, \|x - T(y)\|) + \Phi_2(\|y - T(y)\|, \|y - T(x)\|)}{\Phi_3(\|x - T(y)\|, \|y - T(x)\|)} \tag{7.3.1}$$

pour tous $x, y \in K$, où :

$\imath$) $\Phi_1, \Phi_2 : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ deux applications croissantes par rapport à la première variable et $\Phi_3 : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ tel que $\Phi_3(t_2,t_3) = 0 \Longleftrightarrow (t_2,t_3) = (0,0)$;

ii) $\Phi_2(t,0)=0$ pour tout $t\geq 0$;

iii) $\dfrac{\Phi_1(t_1,t_2)+\Phi_2(t_1,t_3)}{\Phi_3(t_2,t_3)}\leq t_1$, pour tout $t_1\geq 0$ et $(t_2,t_3)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[\setminus\{(0,0)\}$.

Alors

$$\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\|\leq\|T^{n-1}(x)-T^n(x)\|;$$

et pour tout entier positif m et n, on a

$$\|T^n(x)-T^m(x)\|\leq\|x-T(x)\|.$$

En particulier $T\in\Xi_K$.

Preuve. Soit $x\in K$, alors

$$\begin{aligned}\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\| &= \|T(T^{n-1}(x))-T(T^n(x))\|\\ &\leq \frac{\Phi_1(\|T^{n-1}(x)-T^n(x)\|,\|T^{n-1}(x)-T^{n+1}(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^{n+1}(x)\|,\|T^n(x)-T^n(x)\|)}+\\ &\quad\frac{\Phi_2(\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\|,\|T^n(x)-T^n(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^{n+1}(x)\|,\|T^n(x)-T^n(x)\|)}.\end{aligned}$$

En appliquant *ii*) et *iii*), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\| &\leq \|T^{n-1}(x)-T^n(x)\|\\ &\quad .\\ &\quad .\\ &\quad .\\ &\leq \|x-T(x)\|.\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\|T^n(x)-T^m(x)\| &= \|T(T^{n-1}(x))-T(T^{m-1}(x))\|\\ &\leq \frac{\Phi_1(\|T^{n-1}(x)-T^n(x)\|,\|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|,\|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)}+\\ &\quad\frac{\Phi_2(\|T^{m-1}(x)-T^m(x)\|,\|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|,\|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)}.\end{aligned}$$

En utilisant la première assertion combiné avec le fait que Φ_1 et Φ_2 sont croissantes par rapport à la première variable et *iii*), nous obtenons que

$$\begin{aligned}\|T^n(x)-T^m(x)\| \le & \frac{\Phi_1(\|x-T(x)\|, \|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|, \|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)} + \\ & \frac{\Phi_2(\|x-T(x)\|, \|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)}{\Phi_3(\|T^{n-1}(x)-T^m(x)\|, \|T^{m-1}(x)-T^n(x)\|)} \\ & \le \|x-T(x)\|.\end{aligned}$$

Ce qui donne que T satisfait (7.2.1) (ici $k = 1$ pour tous entiers $n, m \geq 1$ et pour tout $x \in K$).□

Définition 7.3.2. Un sous ensemble borné et convexe K d'un espace de Banach X est dit avoir une structure normale, si pour chaque sous ensemble convexe M de K avec plus d'un élément, il y a un point $x \in M$ tel que

$$\sup\{\|x-y\| : y \in M\} < \delta(M).$$

Dans le théorème suivant et sous les hypothèses de la Proposition 7.3.5, nous prenons $\Phi_1(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), \Phi_2(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_3(t_2), \Phi_3(t_1, t_2) = \psi_2(t_1) + \psi_3(t_2)$ $(t_1, t_2 \geq 0)$ où ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des applications définies sur $[0, +\infty[$.

Théorème 7.3.1. soit K un sous ensemble non vide borné fermé et convexe d'un espace de Banach réflexif X ayant la structure normale et soit T une application définie sur K satisfaisant que pour tous $(x, y) \in K \times K, x \neq y$, si $y = T(x)$, nous avons nécessairement $x \neq T(y)$ combiné avec la condition suivante

$$\|T(x)-T(y)\| \le \frac{\psi_1(\|x-T(x)\|)\psi_2(\|x-T(y)\|) + \psi_1(\|y-T(y)\|)\psi_3(\|y-T(x)\|)}{\psi_2(\|x-T(y)\|) + \psi_3(\|y-T(x)\|)} \tag{7.3.2}$$

où ψ_1 est une fonction strictement croissante et $\psi_1(t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$.

Alors T admet un point fixe unique dans K.

Preuve. Comme X est un espace de Banach réflexif, alors chaque famille descendante des sous-ensembles convexes fermés non vides de X a une intersection non vide. Alors, nous pouvons utiliser le lemme de Zorn pour obtenir un sous ensemble minimale K_1 de K qui est fermé, convexe et invariant par T.

• Si $\delta(K_1) = 0$, le problème est résolu car dans ce cas $K_1 = \{x_0\}$ et donc $T(x_0) = x_0$.

• Supposons que $\delta(K_1) > 0$.

Comme K a une structure normale, alors il existe $y \in K_1$ tel que

$$\sup\{\|x - y\|; x \in K_1\} \leq r < \delta(K_1).$$

Par conséquent, $\|y - T^k(y)\| \leq r$ pour tout $k \geq 1$ et donc $\delta(O(y)) \leq r$. Soit $H = \{x \in K_1 : \delta(O(x)) \leq r\}$ et $G = \overline{co}(T(H))$, qui est un sous ensemble non vide convexe et fermé de X. Soit $g \in G$. Alors, nous allons considérer les trois cas suivants.

Premier cas : $g = T(h)$ pour $h \in H$. Alors

$$\|g - T(g)\| = \|T(h) - T^2(h)\| \leq \|h - T(h)\| \leq r.$$

Par conséquent

$$g \in H \text{ et } T(g) \in G.$$

Deuxième cas : $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i), h_i \in H, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

Alors

$$\begin{aligned}
\|g - T(g)\| &= \|T(g) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|T(g) - T(h_i)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\psi_1(\|g - T(g)\|)\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_1(\|h_i - T(h_i)\|)\psi_3(\|h_i - T(g)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\|g - T(g)\|\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + r\psi_3(\|h_i - T(g)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)} \\
&= \|g - T(g)\| \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\psi_2(\|g - T(h_i)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)}\right] + \\
&\quad r \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\psi_3(\|h_i - T(g)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)}\right].
\end{aligned}$$

Posons

$$\gamma_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\psi_2(\|g - T(h_i)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)}\right]$$

et

$$\gamma_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\psi_3(\|h_i - T(g)\|)}{\psi_2(\|g - T(h_i)\|) + \psi_3(\|h_i - T(g)\|)}\right].$$

Nous observons que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, ainsi

$$\|g - T(g)\|(1 - \gamma_1) \leq r\gamma_2,$$

ce qui donne que

$$\|g - T(g)\| \leq r$$

et par conséquent $g \in H$ et $T(g) \in G$.

Troisième cas : Si g est une limite de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i), h_i \in H, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Alors

$$\|g - T(g)\| \leq \|T(g) - T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i))\| +$$

$$\|g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)\| + \|T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)\|.$$

En utilisant le deuxième cas, nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\|T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)\| \leq r.$$

Soit $\epsilon > 0$, en tenant compte de la continuité de T, nous pouvons choisir n suffisamment large tel que

$$\|g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i)\| + \|T(g) - T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(h_i))\| < \epsilon,$$

et par conséquent, nous en déduissons que

$$\|g - T(g)\| \leq r + \epsilon, \forall \epsilon > 0,$$

ce qui implique que

$$\|g - T(g)\| \leq r.$$

Donc $g \in H$ et $T(g) \in G$. Mais K_1 est minimale, alors $K_1 = G$, il s'en suit que $\delta(K_1) = \delta(G)$.

Maintenant, en tenant compte du fait que si A est un sous ensemble d'un espace de Banach X, nous avons $\delta(A) = \delta(\overline{co}(A))$, alors

$$\begin{aligned}
\delta(K_1) &= \delta(\overline{co}(T(H))) \\
&= \delta((T(H))) \\
&= \sup\{\|T(x) - T(y)\| : x, y \in H\} \\
&\leq \sup\{\frac{\psi_1(\|x - T(x)\|)\psi_2(\|x - T(y)\|) + \psi_1(\|y - T(y)\|)\psi_3(\|y - T(x)\|)}{\psi_2(\|x - T(y)\| + \psi_3(\|y - T(x)\|)} : x, y \in H\} \\
&\leq \sup\{\frac{\psi_1(r)\psi_2(\|x - T(y)\|) + \psi_1(r)\psi_3(\|y - T(x)\|)}{\psi_2(\|x - T(y)\| + \psi_3(\|y - T(x)\|)} : x, y \in H\} \\
&\leq \psi_1(r) \leq r < \delta(K_1),
\end{aligned}$$

ceci est une contradiction, alors $\delta(K_1) = 0$, ce qui donne que $K_1 = \{x_0\}$ et montre que T admet un point fixe unique dans K_1.□

Remarque 7.3.2. Si $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_3(t) = t$, nous trouvons le résultat principal de [127].

7.4 Applications

Théorème 7.4.1. Sous les hypothèses du Théorème 7.3.1, si ψ_1 est une fonction subadditive avec $\psi_1 \leq \min\{\psi_2, \psi_3\}$, alors T est une applications ψ_2-quasi-non expansive sur K.

Preuve. Soit z un point fixe unique de T dans K et $x \in K$ avec $x \neq z$, alors

$$\begin{aligned}
\|T(x) - z\| = \|T(x) - T(z)\| &\leq \frac{\psi_1(\|x - T(x)\|)\psi_2(\|x - z\|) + \psi_1(\|z - z\|)\psi_3(\|z - T(x)\|)}{\psi_2(\|x - z\|) + \psi_3(\|z - T(x)\|)} \\
&\leq \frac{\psi_1(\|x - T(x)\|)\psi_2(\|x - z\|)}{\psi_2(\|x - z\|) + \psi_3(\|z - T(x)\|)} \\
&\leq \frac{\psi_1(\|x - T(x)\|)\psi_2(\|x - z\|)}{\psi_1(\|x - T(x)\|)} \\
&= \psi_2(\|x - z\|).
\end{aligned}$$

□

En utilisant le Théorème 7.4.1 combiné avec ([141], Theorem 3.7), nous obtenons le résultat suivant pour la convergence des processus itératifs de Mann et d'Ishikawa.

Proposition 7.4.1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. Soit $\{\alpha_n\}_n$ et $\{\beta_n\}_n$ deux suites réelles dans $[0,1]$ telles que $\{\alpha_n\beta_n\}_n$ converge vers un certain nombre réel positif, soit $x_0 \in X$. Sous les hypothèses du Théorème 7.4.1 avec ψ_2 une fonction de comparaison continue. Alors, la suite d'Ishikawa donnée par (1.5.3) converge vers l'unique point fixe de$T$. De plus, si $\{\beta_n\}_n$ est une suite constante égale à 0, l'itération de Mann donnée par (1.5.2) converge vers le même point fixe unique de T.

Rappelons le théorème suivant dû à J. B. Diaz et F. T. Metcalf [42].

Théorème 7.4.2. Soit T une application continue d'un espace métrique (X, d) tel que

$(\imath)$ $F(T)$ est non vide ;

$(\imath\imath)$ Pour chaque $y \in X$ tel que $y \notin F(T)$, et pour chaque $z \in F(T)$ nous avons

$$d(T(y), z) < d(y, z).$$

Alors une, et seulement une des propriétés suivantes sera satisfaite

a) Pour chaque $x_0 \in X$ la suite de Picard $\{T^n(x_0)\}$ contient une sous suite qui ne converge pas ;

b) Pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n(x_0)\}$ converge vers un point qui appartient à $F(T)$.

Théorème 7.4.3. *([49])* Soit $T : K \longrightarrow K$ une application condensante définie sur un sous-ensemble borné, fermé et convexe K d'un espace de Banach X. Alors, T admet au moins un point fixe.

Définissons la propriété géométrique $\mathcal{P}(f_1, f_2, f_3)$ donnée comme suit :

Définition 7.4.1. Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé, nous disons que X a la propriété $\mathcal{P}(f_1, f_2, f_3)$ si pour tous $x, y \in X$, $f_1(\|x+y\|) = f_2(\|x\|) + f_3(\|y\|)$ et $x \neq 0, y \neq 0$, alors $x = cy$ $(c > 0)$.

Dans le cas où $f_1 = f_2 = f_3 = I_{\mathbb{R}^+}$, cette propriété est satisfaite par la stricte convexité des espaces de Banach.

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et K un sous-ensemble borné et fermé de X. Soit T : $K \longrightarrow K$ une application. Nous définissons l'ensemble $\sum_T$ comme suit

$$\sum_T = \{\alpha x + \beta T(x) : \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1, x \in K \backslash F(T)\}.$$

Comme dans le cas du Théorème 7.3.1, dans les résultats suivants, nous prenons $\Phi_1(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)$, $\Phi_2(t_1, t_2) = \psi_1(t_1)\psi_3(t_2)$ et $\Phi_3(t_1, t_2) = \psi_2(t_1) + \psi_3(t_2)$.

Théorème 7.4.4. Soit $T : K \longrightarrow K$ une application condensante définie sur un sous ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach X ayant la propriété $\mathcal{P}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ où $\psi_2(t) \leq t$ pour tout $t \geq 0$ et ψ_1 une fonction croissante, subadditive avec $\psi_1 \leq \min\{\psi_2, \psi_3\}$. Supposons que T satisfait (7.3.1) et $F(T) \bigcap \sum_T = \emptyset$. Alors, pour chaque $x \in K$, la suite $\{S^n(x)\}$ de Kirk définie par (1.5.4) converge vers le point fixe de T.

Preuve. D'après le Théorème 7.4.3, il s'en suit que $F(T) \neq \emptyset$. En outre, S est une application condensante. De plus, si A est un sous ensemble borné de K tel que $\alpha(A) > 0$. Alors

$$S(A) \subseteq \lambda_0 A + \lambda_1 T(A) + ... + \lambda_n T^n(A).$$

Donc, par les propriétés : monotonie, semi-additivité algébrique et semi-homogénéité, nous obtenons

$$\alpha(S(A)) \leq \lambda_0 \alpha(A) + \lambda_1 \alpha(T(A)) + ... + \lambda_n \alpha(T^n(A)).$$

Le fait que T est condensante montre que

$$\alpha(T(A)) < \alpha(A).$$

$$..$$

$$..$$

$$..$$

$$\alpha(T^n(A)) \leq \alpha(T^{n-1}(A)) \leq .... \leq \alpha(T(A)) < \alpha(A)$$

et donc

$$\alpha(S(A)) < (\lambda_0 + ... + \lambda_n)\alpha(A) = \alpha(A).$$

Aussi, par le Théorème 7.4.3, $F(S) \neq \emptyset$. En outre, en tenant compte des Propositions 7.3.3 et 7.3.4, il s'en suit $F(T) = F(S) \neq \emptyset$.

pour $x \in K$, soit

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} S^n\{x\}.$$

Nous avons $S(A) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S^n\{x\} \subset A$ et comme $A = \{x\} \bigcup S(A)$, ce qui donne que

$$\begin{aligned}
\alpha(A) &= \max\{\alpha(\{x\}), \alpha(S(A))\} \\
&= \max\{0, \alpha(S(A))\} \\
&= \alpha(S(A)).
\end{aligned}$$

Comme S est condensante, nous établissons que $\alpha(A) = 0$ et par la propriété de la régularité, nous déduissons que A est totalement borné et par conséquent $\overline{A}$ est compact (car X est un espace de Banach), donc la suite $\{S^n(x)\}$ contient une sous suite convergente.

Maintenant, si y est un point fixe de T et $x \in K \backslash F(T)$, alors $T(y) = y$ et $T(x) \neq y$, donc

$$\|T(x) - y\| \leq \frac{\psi_1(\|x - T(x)\|)\psi_2(\|x - y\|)}{\psi_2(\|x - y\|) + \psi_3(\|y - T(x)\|)} \text{ (car } \psi_1(0) = 0)$$

D'ailleurs, le fait que ψ_1 est croissante, subadditive et $\psi_1 \leq \min\{\psi_2, \psi_3\}$ donne que

$$\psi_1(\|x - T(x)\|) \leq \psi_2(\|x - y\|) + \psi_3(\|y - T(x)\|).$$

L'inégalité précédante est stricte, en effet, si

$$\psi_1(\|x - T(x)\|) = \psi_2(\|x - y\|) + \psi_3(\|y - T(x)\|).$$

En utilisant la propriété $\mathcal{P}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ satisfaite par l'espace de Banach X, nous obtenons

$$x - y = c(y - T(x))(c > 0),$$

ce qui implique que $x + cT(x) = (1 + c)y$ et par conséquent $y = \frac{1}{1+c}x + \frac{c}{1+c}T(x) \in \Sigma_T$ ceci est une contradiction, ce qui donne

$$\|T(x) - y\| < \psi_2(\|x - y\|) \leq \|x - y\|.$$

ce qui implique

$$\|T^k(x) - y\| < \|x - y\|.$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\|S(x)-y\| &= \|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k T^k(x)-y\|.\\
&= \|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k T^k(x)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k y\|.\\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\|T^k(x)-y\|.\\
&< \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\|x-y\| = \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Alors S satisfait les conditions du théorème de Diaz et Metcalf ce qui implique que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S^n(x)$ existe et appartient à $F(T)=F(S)$. $\square$

Comme conséquence immédiate de la preuve du Théorème 7.4.4, nous avons

Théorème 7.4.5. Soit $(X,\|.\|)$ un espace de Banach réflexif ayant la propriété $\mathcal{P}(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ où $\psi_2(t)\leq t$ pour tout $t\geq 0$ et ψ_1 est une fonction croissante, subadditive avec $\psi_1\leq \min\{\psi_2,\psi_3\}$. Soit $T: K\longrightarrow K$ une application définie sur un sous-ensemble borné, fermé et convexe K ayant la structure normale dans X. Supposons que T satisfait les hypothèses du Théorème 7.3.1. Si $x_0\notin \sum_T$ (où x_0 est le point fixe unique de T dans K) et S est une application condensante, alors, pour chaque $x\in K$, la suite $\{S^n(x)\}$ converge vers x_0.

Dans le résultat suivant, nous établissons la presque stabilité du processus itératif de Picard.

Corollaire 7.4.1. Soit $(X,\|.\|)$ un espace de Banach réflexif et K un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe de X ayant la structure normale. Supposons que les hypothèses du Théorème 7.4.1 sont satisfaites avec ψ_2 une fonction de comparaison continue. Si z_0 est le point fixe unique de T et $x_0\in K$ avec $x_{n+1}:=T(x_n), n\in\mathbb{N}$ est le processus de Picard et $\{y_n\}_n\subset K$. Définissons $\{\epsilon_n\}_n$ par

$$\epsilon_n := \|y_{n+1}-T(y_n)\| \text{ pour tout } n\in\ \mathbb{N}$$

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\epsilon_n<\infty$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = z_0$. En d'autre terme, le processus itératif de Picard est presque T- stable.

Preuve. Le résultat est établi en combinant le fait que T est ψ_2-quasi-non expansive avec le Théorème 4.5 de [141]. $\square$

Chapitre 8

Mesures de non compacité et application aux équations différentielles stochastiques

8.1 Résumé

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique au moyen des propriétés de l'application (opérateur) non expansive aléatoire associée. De plus, en tenant compte des résultats du type métrique de Diaz-Metcalf, on prouve la convergence du processus de Kirk vers cette solution pour des tempts suffisamment petits.

8.2 Introduction et notations

Il est bien connu que la théorie du point fixe est un outil puissant pour la résolution des problèmes nonlinéaires (équations différentielles, équations intégro-différentielles,...). Cette théorie est devenue florissante pour plusieurs auteurs qui ont contribué à l'élaboration de miliers de travaux sur le sujet. Le développement de cette théorie a été lié étroitement avec celui de l'analyse fonctionnelle dans les années 50. Le mathématicient italien G. Darbo a publié un résultat dans lequel, il assure l'existence de points fixes pour un type d'opérateurs dits opérateurs condensants généralisant le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach. Cette découverte a été le sujet de plusieurs applications à la fois en analyse linéaire et nonlinéaire (équations intégrales à noyaux singuliers, équations différentielles définies sur les domaines non bornés, opérateurs différentiels ayant un spectre essentiel non vide, problème aux bords dans les espaces de Banach et autres).

Une application condensante (densifiante) est une application pour laquelle l'image de chaque ensemble est dans certain sens plus compact que l'ensemble lui même, le degré de noncompacité d'un ensemble est mesuré au moyen de fonctions dites mesures de non compacité. Parmi la champs d'applications de ces outils, la théorie des opérateurs probabilistiques qui est une branche de l'analyse stochastique qui traite les opérateurs aléatoires et leurs propriétés, ils sont vus comme une extension de ceux du cas déterministe. Cet axe de recherches a émergé dans les années 50 grâce aux travaux de l'école européenne des probabilités dont l'objet principale était la résolution des équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles stochastiques modélisant les trajectoires des phénomènes aléatoires, étudiées et développées un premier temps par K. Itô en 1946. Une équation différentielle stochastique est une équation différentielle ordinaire perturbée par un bruit blanc (faisant intervenir un mouvement Brownien). L'histoire dans cette direction remonte aux travaux du Botaniste R. Brown qui avait décrit en 1827 ce mouvement comme celui d'une particule organique fine en suspension dans gaz ou un fluide. A la fin du 19 siècle, les scientifiques Bachelier et Smoluchowski s'étaient mis a étudier ce type de mouvements. Après et plus précisément en 1905, A. Einstein a publié un article dans lequel, il a montré que la densité de probabilité du mouvement brownien satisfait l'équation de la chaleur. Le premier traitement mathématique rigoureux dans ce contexte a été donné par N. Wienner (1923-1924) qui a prouvé l'existence du mouvement Brownien. (Pour plus de détails sur ces questions, on peut voir par exemple [50]

Dans ce travail, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô suivante :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a_1(\theta, X(f(\theta)))d\theta + \int_0^t a_2(\theta, X(f(\theta)))dw(\theta) \tag{8.2.1}$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions mesurables et $0 \leq f(\theta) \leq \theta$. Rappelons que ce type d'équations modélise par exemple le mouvement d'une particule soumise à une infinité de chocs au temps t. Ici a_1 est un coefficient de transfert tandis que a_2 est le coefficient de diffusion. Dans le cas

a_1 et a_2 satisfont les conditions de Lipschitz, par rapport à la deuxième variable, le résultat pour $f(\theta) \equiv \theta$ a été établi par T. I. Gikhman et K. Itô [50] qui ont montré que l'application associée à (8.2.1) est une contraction et la solution a été obtenue au moyen da la méthode des approximations successives.

Définition 8.2.1. un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un triplet où Ω est un ensemble non vide, $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre de Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité définie sur $\mathcal{F}$ ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$).

Notons que quelques résultats d'existence de théorèmes de points fixes impliquant les espaces métriques probabilistes peuvent être trouvés par exemple dans ([122, 147, 148]).

Une variable aléatoire X est une fonction $\mathbb{P}$-mesurable définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une famille de variables aléatoires $X_t(\omega)(t \geq 0)$ (noté également par $X(t, \omega)$ ou simplement X_t) est appelée processus stochastique. Pour $\omega \in \Omega$, la fonction $t \longrightarrow X(t, \omega)$ est la trajectoire du processus stochastique $X(t, \omega)$.

l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est définie comme une intégrale

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

si elle existe.

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega / X(\omega) < a \text{ et } Y(\omega) < b\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega / X(\omega) < a\} \times \mathbb{P}\{\omega \in \Omega / Y(\omega) < b\}.$$

Définition 8.2.2. Le processus de Wiener (appelé également mouvement Brownien) $\{w_t\}_{t \geq 0}$ est un processus stochastique satisfaisant les propriétés suivantes

a) $w_0 = 0$;

b) Pour $0 < t_1 < .... < t_n$ les variables aléatoires $w_{t_2} - w_{t_1}, w_{t_3} - w_{t_2}, ..., w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;

c) La variable aléatoire $w_{t+s} - w_t$ est normalement distribuée d'espérence nulle et de variance égale à 1.

Remarque 8.2.1. Si w est une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}(w^2)}$, alors $\mathbb{E}|w| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$. Ainsi, nous obtenons

$$\mathbb{E}|w_{t_{j+1}} - w_{t_j}| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t_{j+1} - t_j}$$

et par conséquent la série $\sum_j \mathbb{E}|w_{t^n_{j+1}} - w_{t^n_j}|$ diverge avec $t^n_{j+1} - t^n_j \longrightarrow 0$, où $0 < t^n_1 < t^n_2 < ..... < t^n_n = T$.

Pour le couple $(w(t), X(t))$ de processus de Wiener $w(t)$ et le processus stochastique $X(t)$, nous définissons l'intégrale d'Itô comme suit

$$I(X) = \int_0^T X(t)dw(t).$$

L'intégrale d'Itô n'est pas une intégrale classique, ceci est dû à la non différentiabilité des trajectoires de $w(t)$ et la divergence de la série $\sum_j \mathbb{E}|w_{t^n_{j+1}} - w_{t^n_j}|$.

Au processus de Wiener, on peut associé la filtration $\mathcal{F}_t$ $(\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}), 0 \leq t \leq T$, qui est une famille de σ-algèbre engendrée par les trajectoires du mouvement Brownien à l'instant t, en d'autre termes,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t \leq T)\}.$$

Il est facile de montrer que la famille $\mathcal{F}_t$ est croissante (par rapport à l'inclusion).

Définition 8.2.3. Une variable aléatoire Y est dit $\mathcal{F}_t$-mesurable si la connaissance de Y dépend uniquement sur l'information connue à l'instant t.

Définition 8.2.4. Une suite des variables aléatoires réelles X_n sur Ω converge vers la variable aléatoire X en probabilité

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

si pour chaque $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} = 1.$$

Soit $\mathcal{M}_2([0, T])$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions $X(t, \omega)$ définies et mesurables séparément par rapport à $t \in [0, T]$ et $\omega \in \Omega$ qui sont aussi mesurables par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0, T]$ et tels que

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega / \int_0^T |X(t, \omega)|^2 dt < \infty\} = 1.$$

Dans la suite, sans perdre de généralité, $X(t, .)$ sera noté par $X(t)$.

Dans le cas où $X(t) = X(t_k)$ pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < .... < t_n = T)$. $\int_0^T X(t)dw(t)$ est donnée par la formule

$$\int_0^T X(t)dw(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}).$$

Dans le cas général où $X(t)$ est un élément arbitraire de $\mathcal{M}_2([0,T])$, alors il existe une suite de fonctions étagées $X_n(t)$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 dt = 0 \text{ (en probabilité)}.$$

et la suite $\int_0^T X_n(t)dw(t)$ converge en probabilité vers une certaine limite ξ qui est appelée intégrale stochastique d'Itô de $X(t)$ notée par $\int_0^T X(t)dw(t)$.

Quelques propriétés de l'intégrale stochastique :

($\imath$) L'intégrale d'Itô est linéaire ;

($\imath\imath$) Si $\int_0^T \mathbb{E}(|f(t)|^2)dt < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(\int_0^T f(t)dw(t)) = 0, \tag{8.2.2}$$

et

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \le s \le \mu} |\int_0^s f(t)dw(t)|^2) \le 4 \int_0^\mu \mathbb{E}(|f(t)|^2)dt \ (0 \le \mu \le T). \tag{8.2.3}$$

Dans la suite, nous supposons que dans l'équation (8.2.1), la valeur initiale qui est la variable aléatoire x_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Définition 8.2.5. Le processus $X(t)$ est appelé une solution forte de l'équation (8.2.1) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

($\imath$) $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable ;

($\imath\imath$) Les intégrales dans l'équation (8.2.1) existent ;

($\imath\imath\imath$) $\mathbb{P}(\Xi) = 1$ où Ξ est l'ensemble $\omega \in \Omega$ tel que l'équation (8.2.1) est satisfaite pour tout $t \in [0,T]$.

8.3 Résultats principaux

Nous désignons par X_T l'espace vectoriel des fonctions aléatoires mesurables $\xi(t,\omega)$ par rapport à la σ-algèbre $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0,T]$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega/t \longrightarrow \xi(t,\omega)$ est continue$\}) = 1$. Nous posons $\|\xi\|_{X_T} = \sqrt{\mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq s\leq T}|\xi(s,\omega)|)^2}$. Il est facile de montrer $\|.\|_{X_T}$ définie une norme sur X_T.

Théorème 8.3.1. $(X_T, \|.\|_{X_T})$ est un espace de Banach.

Preuve. Il suffit de montrer que X_T est complet par rapport à la norme $\|.\|_{X_T}$. Soit ξ_n une suite de Cauchy dans X_T, donc on peut extraire une sous suite ξ_{n_k} qui converge presque sûrement pour $t \in [0,T]$. D'après l'ensemble des indices $\{n_k\}(k \geq 1)$, nous choisissons un sous ensemble des entiers $\{m_k\}(k \geq 1)$ tels que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|\xi_n(s) - \xi_{n'}(s)|^2) < 2^{-2k} \text{ pour } t \in [0,T] \text{ et } n, n' \geq m_k.$$

En multipliant par 2^k, nous obtenons que

$$\frac{\mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq s\leq t}|\xi_n(s) - \xi_{n'}(s)|^2)}{\left(\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^2} < 2^{-k}.$$

En utilisant l'inégalité de Chebychev, il s'en suit que

$$\mathbb{P}(\{w \in \Omega/ \sup_{0\leq s\leq t}|\xi_n(s) - \xi_{n'}(s)|^2) > \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}\}) < 2^{-k}.$$

Comme la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$ converge, le lemme de Borel-Catelli donne que

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}\{w \in \Omega/ \sup_{0\leq s\leq t}|\xi_n(s) - \xi_{n'}(s)|^2) > \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}\}) = 0.$$

Ainsi, pour presque $\omega \in \Omega$, il existe $r_0 \geq 1$ tel que

$$\sup_{0\leq s\leq t}(|\xi_{n_r}(s) - \xi_{n_{r'}}(s)|^2) \leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \text{ si } r, r' \geq r_0.$$

Il s'en suit que, la somme partielle

$$\xi_{m_1}(t) + \textstyle\sum_{j=1}^{k-1}(\xi_{m_{j+1}}(t) - \xi_{m_j}(t)) = \xi_{m_k}(t).$$

converge uniformément dans $[0,T]$ et soit $\xi(t)$ sa limite (pour cette topologie).

Ce qui donne que

$$\sup_{0\leq t\leq T}(|\xi_{m_k}(t)-\xi(t)|^2)\longrightarrow 0\ (k\longrightarrow +\infty),$$

et par conséquent

$$\sqrt{\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}(|\xi_{m_k}(t)-\xi(t)|^2)}\longrightarrow 0\ (k\longrightarrow +\infty).$$

Ce qui montre que ξ_{m_k} converge vers $\xi(t)$ dans X_T.

Comme ξ_n est une suite de Cauchy dans X_T et contient la sous suite ξ_{m_k} qui converge vers ξ, alors ξ_n converge vers ξ dans X_T, ce qui achève la preuve. □

Notre but principal est de transformer l'équation (8.2.1) à un problème de point fixe. Pour cela , nous l'associons à l'application suivante notée par C

$$(CX)(s)=x_0+\int_0^s a_1(\theta,X(f(\theta)))d\theta+\int_0^s a_2(\theta,X(f(\theta)))dw(\theta \tag{8.3.1}$$

Il est facile d'observer que C est définie sur X_T, mais pour qu'elle prend ses valeurs dans X_T, nous avons besoin d'ajouter des conditions supplémentaires sur les fonctions a_1 et a_2 qui est le but de la proposition suivante.

Proposition 8.3.1. Supposons que les hypothèses suivantes (appelées croissance polynomiale) sont satisfaites

$$|a_1(s_1,u_1)|^2\leq M(|u_1|^2+1)\ \ et\ \ |b_1(s_2,u_2)|^2\leq M(|u_2|^2+1)\ (M>0) \tag{8.3.2}$$

Alors, C est une application sur X_η pour tout $\eta\in[0,T]$.

Preuve. Sans perdre de généralité, nous supposons que $x_0=0$. Maintenant, soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, d'après l'inégalité $(x_1+x_2)^2\leq 2x_1^2+2x_2^2$, nous en déduisons que

$$|(CX)(s)|^2\leq 2|\int_0^s a_1(\theta,X(f(\theta))d\theta|^2+2|\int_0^s a_2(\theta,X(f(\theta))d\theta|^2 \tag{8.3.3}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il s'en suit que

$$|(CX)(s)|^2\leq 2s\int_0^s |a_1(\theta,X(f(\theta))|^2d\theta+2|\int_0^s a_2(\theta,X(f(\theta))dw(\theta)|^2 \tag{8.3.4}$$

En passant aux sup et en utilisant la monotonie de l'espérance, nous obtenons que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le s\le \eta} |(CX)(s)|^2) \le 2\eta\mathbb{E}(\int_0^\eta |a_1(\theta, X(f(\theta)))|^2 d\theta + 2\mathbb{E}\sup_{0\le s\le \eta} |\int_0^s a_2(\theta, X(f(\theta)))d\omega(\theta)|^2$$

(8.3.5)

En utilisant (8.2.3) et la commutativité entre l'espérance et l'intégrale, il s'en suit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le s\le \eta} |(CX)(s)|^2) \le 2\eta(\int_0^\eta \mathbb{E}(|a_1(\theta, X(f(\theta)))|^2)d\theta + 8\int_0^\eta \mathbb{E}(|a_2(\theta, X(f(\theta)))|^2)d\theta| \quad (8.3.6)$$

Par les assertions données ci-dessus, nous obtenons

$$\mathbf{E}(\sup_{0\le s\le \eta} |(CX)(s)|^2) \le 2M\left[\eta(\int_0^\eta \mathbb{E}(|X(f(\theta))|^2+1)d\theta + 4\int_0^\eta \mathbb{E}(|X(f(\theta))|^2+1)d\theta\right] \quad (8.3.7)$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le s\le \eta} |(CX)(s)|^2) \le 2M\left[\eta(\int_0^\eta \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta + \eta^2 + 4\int_0^\eta \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta + 4\eta\right] \quad (8.3.8)$$

Le fait que $0 \le f(\theta) \le \theta$ ($\theta \in [0, T]$) et la dernière inégalité donne que

$$\|(CX)\|^2_{X_\eta} \le 2M(\eta^2 + 4\eta)(\|X\|^2_{X_\eta} + 1) \quad (8.3.9)$$

Ainsi $\|(CX)\|_{X_\eta}$ est définie si $\|X\|_{X_\eta}$ est fini ce qui complète la preuve. □

Si $X(t)$ est une solution de l'équation (8.2.1) sur l'intervalle $[0, s], 0 \le s \le T$, notons par $\varphi(s) = \|X\|^2_{X_s}$.

Lemme 8.3.1. La fonction φ et bornée sur l'intervalle $[0, T]$.

Preuve. Par l'inégalité (8.3.9), en changeant η par s, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le s} |(CX)(r)|^2) &\le 2M\left[s(\int_0^s \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta) + s^2 + 4\int_0^s \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta + 4s\right] .\\ &\le 2M\left[T(\int_0^s \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta) + T^2 + 4\int_0^s \|X\|^2_{X_{f(\theta)}} d\theta + 4T\right] .\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $X(t)$ est une solution de l'équation (8.2.1) sur l'intervalle $[0, s]$ et $0 \le f(s) \le s$, il s'en suit que

$$\varphi(s) \le K + K' \int_0^s \varphi(r)dr. \quad .$$

où $K = 2M(T^2 + 4T)$ et $K' = 2M(T + 4)$.

Maintenant, le lemme de Gronwall implique que

$$\varphi(s) \leq K e^{K'T} \qquad .$$

ce qui donne le résultat. □

Soit $\mathcal{M}([0,T])$ l'espace vectoriel des fonctions scalaires définies sur $[0,T]$, il est partiellement ordonné par l'ordre usuel $\leq$. Soit $\gamma : \mathcal{P}(X_T) \longrightarrow \mathcal{M}([0,T])$ définie par

$$\begin{cases} \gamma : \mathcal{P}(X_T) \longrightarrow \mathcal{M}([0,T]); \\ \qquad \Lambda \longrightarrow \gamma(\Lambda) \end{cases}$$

Ici

$$\begin{cases} \qquad \gamma(\Lambda) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}; \\ \qquad\qquad t \longrightarrow \gamma(\Lambda)(t)) = \gamma_t(\Lambda_t) \end{cases}$$

où $\Lambda_t = \{X_t = X_{|[0,t]} : X \in \Lambda\} \subset X_t$ et γ_t de est la mesure de non compacité de Hausdorff sur l'espace X_t.

Lemme 8.3.2. *La fonction γ définie une mesure de non compacité dans le sens général sur X_T qui est nonsingulière additive (i.e., $\gamma(A \bigcup \{X\}) = \gamma(A)$ pour tous $A \subset X_T$ et $X \in X_T$).*

Preuve. Soit $A \subset X_T$, nous avons $A \subset \overline{co}(A)$, ce qui donne que $A_t \subset (\overline{co}(A))_t$ pour tout $t \in [0,T]$, la propriété de monotonie de la mesure de Hausdorff implique que $\gamma_t(A_t) \leq \gamma_t(\overline{co}(A))_t$ pour tout $t \in [0,T]$, ce qui donne que $\gamma(A) \leq \gamma(\overline{co}(A))$. D'autre part

$$(\overline{co}(A))_t = \{X_|[0,t] : X \in \overline{co}(A)\} \subset \overline{co}(A_t).$$

Encore, la monotonie et l'invariance par la ferméture de la mesure de Hausdorff conduit à

$$\gamma_t((\overline{co}(A))_t) \leq \gamma_t(\overline{co}(A_t)) = \gamma_t(A_t).$$

Par conséquent

$$\gamma((\overline{co}(A)))(t) \leq \gamma(A)(t) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Il s'en suit que $\gamma((\overline{co}(A))) \leq \gamma(A)$ ce qui achève la preuve de la première assertion. Le fait que γ est non singulière additive est triviale. □

Maintenant, introduisons les conditions suivantes

$\mathcal{H}_1)$ $|a_1(s,u_1) - a_1(s,u_2)|^2 \leq h(s)g(\|u_1 - u_2\|^2)$ où

a) $h : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ intégrable et $\displaystyle\int_0^s h(s)ds \leq \frac{1}{2s+8}$ pour tout $s \in [0,T]$ et,

b) $g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction croissante et concave avec $g(s) \leq s$ pour tout $s \in [0,+\infty[$.

$\mathcal{H}_2)$ Pour tout $A > 0$, l'inégalité

$$\widetilde{h}(s) \leq A \int_0^s h(\theta) g(\widetilde{h}(f(\theta)))d\theta, 0 \leq s \leq T.$$

ne peut pas admettre des solutions non triviales.

$\mathcal{H}_3)$ $\lambda(f^{-1}(\Upsilon)) \longrightarrow 0$ quand $\lambda(\Upsilon) \longrightarrow 0$, ici λ est la mesure de Lebesgue et $\Upsilon \subset [0,t]$ $(0 \leq t \leq T)$.

Remarque 8.3.1. Nous notons que si nous prenons $h(t) = \alpha$ $(\alpha > 0), g(u) = u, f(x) = x$ et $T = -2 + \sqrt{4 + \dfrac{1}{2\alpha}}$, les hypothèses données par $\mathcal{H}_1), \mathcal{H}_2)$ et $\mathcal{H}_3)$ sont satisfaites.

Proposition 8.3.2. Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1)$, l'application C définie par (8.3.1) est non expansive sur chaque X_t $(0 \leq t \leq T)$.

Preuve. Nous avons

$$|CX(s) - CY(s)| = |\int_0^s [a_1(\theta, X(f(\theta))) - a_1(\theta, Y(f(\theta)))]\, d\theta +$$

$$\int_0^s [a_2(\theta, X(f(\theta))) - a_2(\theta, Y(f(\theta)))]\, d\omega(\theta)|.$$

En utilisant l'inégalité $(x_1 + x_2)^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2$, nous obtenons que

$$|CX(s) - CY(s)|^2 \leq 2|\int_0^s [a_1(\theta, X(f(\theta)) - a_1(\theta, Y(f(\theta))]\, d\theta|^2 +$$

$$2|\int_0^s [a_2(\theta, X(f(\theta)) - a_2(\theta, Y(f(\theta))]\, d\omega(\theta)|^2.$$

L'inégalité de Hölder, nous permet d'écrire

$$|CX(s) - CY(s)|^2 \leq 2s \int_0^s |\, [a_1(\theta, X(f(\theta)) - a_1(\theta, Y(f(\theta))]\, |^2 d\theta +$$

$$2|\int_0^s [a_2(\theta, X(f(\theta)) - a_2(\theta, Y(f(\theta))]\, d\omega(\theta)|^2.$$

En passant au sup sur $[0,T]$ et en utilisant la monotonie et l'espérance, il s'en suit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|CX(s)-CY(s)|^2)\leq 2t\mathbb{E}(\int_0^t |\,[a_1(\theta,X(f(\theta))-a_1(\theta,Y(f(\theta))]\,|^2 d\theta)+$$

$$2\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|\int_0^s [a_2(\theta,X(f(\theta))-a_2(\theta,Y(f(\theta))]\,d\omega(\theta)|^2).$$

L'inégalité stochastique (8.2.3) donne que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|CX(s)-CY(s)|^2)\leq 2t\mathbb{E}(\int_0^t |\,[a_1(\theta,X(f(\theta))-a_1(\theta,Y(f(\theta))]\,|^2 d\theta)+$$

$$8\int_0^t \mathbb{E}(|\,[a_2(\theta,X(f(\theta))-a_2(\theta,Y(f(\theta))]\,|^2)d\theta.$$

Donc

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|CX(s)-CY(s)|^2)\leq (2t+8)\mathbb{E}(\int_0^t h(\theta)g(|X(f(\theta))-Y(f(\theta))|^2 d\theta)$$

La commutativité entre l'espérance et l'intégrale combiné avec la fait que g est concave donne que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|CX(s)-CY(s)|^2)\leq (2t+8)(\int_0^t h(\theta)g(\mathbb{E}(\sup_{0\leq\theta\leq t}(|X(f(\theta))-Y(f(\theta))|^2)d\theta)$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|CX(s)-CY(s)|^2)\leq (2t+8)(\int_0^t h(\theta)\mathbb{E}(\sup_{0\leq\theta\leq t}(|X(f(\theta))-Y(f(\theta))|^2)d\theta)$$

Il s'en suit que

$$\|C(X)-C(Y)\|_{X_t}^2\leq (2t+8)(\int_0^t h(\theta)d\theta)\|X-Y\|_{X_t}^2$$

Par conséquent,

$$\|C(X)-C(Y)\|_{X_t}\leq \|X-Y\|_{X_t}$$

Ce qui montre que C est une application non expansive sur X_t, ce qui donne le résultat. □

Remarque 8.3.2. Notons que les applications non expansives sur les sous ensembles bornés des espaces de Banach n'ont pas nécessairement de points fixes, nous pouvons nous référer par exemple au travail célèbre de D. E. Alspach [7] qui a donné un exemple d'un sous-ensemble convexe faiblement compact M de l'espace $L_1([0,1])$ et une isométrie libre de point fixe sur M.

Théorème 8.3.2. Sous les hypothèses $\mathcal{H}_1), \mathcal{H}_2), \mathcal{H}_3)$ combinées avec la condition de croissance polynomiale donnée par (8.3.2), C est une application condensante par rapport à la mesure de non compacité γ sur X_t pour tout $t \in [0, T]$.

Maintenant, nous donnons le lemme suivant

Lemme 8.3.3. Soient $\epsilon > 0$ et $\phi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, alors l'ensemble de points de discontinuité de ϕ ayant une magnitude $\geq \epsilon$ est un ensemble fini sur $[0, T]$.

Preuve. Sans perdre de généralité, nous supposons que ϕ est croissante. Nous désignons par D_ϵ l'ensemble de points $x \in [0, T]$ tels que

$$\phi(x + 0) - \phi(x - 0) \geq \epsilon.$$

Soit $0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n < T$ une suite finie arbitraire de points dans D_ϵ ; alors

$$\phi(T) - \phi(0) \geq \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i + 0) - \phi(x_i - 0)) \geq n\epsilon.$$

Si D_ϵ est un ensemble fini, il s'en suit que

$$\phi(T) - \phi(0) \geq n\epsilon \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ce qui donne $\phi(T) - \phi(0) = +\infty$ qui est une contradiction, donc $card(D_\epsilon)$ doit être fini et par conséquent D_ϵ est un ensemble fini dans $[0, T]$. $\square$

Lemme 8.3.4. Pour tout $\Lambda \subset B_T$, la fonction

$$\begin{cases} \gamma(\Lambda) : [0, T] \longrightarrow [0, +\infty[; \\ \qquad t \longrightarrow \gamma(\Lambda)(t)) = \gamma_t(\Lambda_t) \end{cases}$$

est une fonction croissante et bornée sur $[0, T]$.

Preuve. Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$ tels que $t_1 \leq t_2$; alors $\Lambda_{t_1} \subset \Lambda_{t_2}$. La monotonie de la mesure de Hausdorff donne que $\gamma_{t_1}(\Lambda_{t_1}) \leq \gamma_{t_2}(\Lambda_{t_2})$ et implique que $\gamma(\Lambda)(t_1) \leq \gamma(\Lambda)(t_2)$ ce qui prouve la première assertion. La deuxième assertion découle directement de la première, en effet par la monotonie, nous déduisons que $\gamma(\Lambda)(t) \leq \gamma(\Lambda)(T)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve du Théorème 8.3.2 Nous montrons que s'il existe $A \subset X_t$ tel que $\gamma(A) \leq \gamma(C(A))$, alors nous obtenons nécessairement $\gamma(A) = 0$. Soient $t > 0$ et $\epsilon > 0$, en utilisant les

Lemmes 8.3.4 et 8.3.3, nous désignons par $\{t_j\}_{j=1}^{m_0}$ l'ensemble de points dans $[0,t]$ pour lesquels $\gamma(A)(t_j+0)-\gamma(A)(t_j-0)\geq\epsilon$. Il est facile de déduire qu'il existe δ_1 suffisamment petit tel que $\inf\limits_{t,t'\in]t_j-\delta_1,t_j+\delta_1[}|\gamma(A)(t)-\gamma(A)(t')|\geq\epsilon$ pour tout $j=1,...,m_0$. Soit $\Im=[0,t]\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{m_0}]t_j-\delta_1,t_j+\delta_1[$, nous observons $\Im=\bigcup\limits_{k=1}^{m_0+1}I_k$ où chaque I_k est un intervalle fermé et borné avec $I_k\bigcap I_j=\emptyset$ pour $k\neq j$. Sur I_k, la fonction $t\longrightarrow\gamma(A)(t)$ est uniformément continue, ce qui implique l'existence de $\delta_2>0$ suffisamment petit tel que pour tous $s,s'\in I_k:|s-s'|<\delta_2$, alors $|\gamma(A)(s)-\gamma(A)(s')|<\epsilon$. D'autre part, dans I_k, nous choisissons un ensemble fini $\{b_{k_s}\}_{s=1}^{r_k}$ pour lequel $\delta_2<b_{k_s}-b_{k_s-1}<\frac{3}{2}\delta_2$. Maintenant, pour tout $1\leq s\leq r_k$ $(k=1,...,m_0+1)$, soit $\{M_{i_1},M_{i_2},M_{i_3},...,M_{i_s}\}$ est $\gamma(A)(b_{k_s})+\epsilon$-fillet de l'ensemble $A_{b_{k_s}}$. Ainsi, nous pouvons construire une famille de trajectoires $\{G_l:l=1,...,h\}$ telle que $\mathbb{P}\{\omega\in\Omega/t\longrightarrow G_l(t)(\omega)$ est continue $(l=1,...,h)\}=1$ comme suit : $G_l\equiv M_{i_f}$ sur les intervalles $J_{k_s}=[b_{k_s-1}+\frac{\delta_2}{2},b_{k_s}-\frac{\delta_2}{2}]$ pour tout $1\leq f\leq s$ $(k=1,...,m_0+1),(l=1,....,h)$ et linéaire sur les intervalles complémentaire. D'autre part, comme $\gamma(A)\leq\gamma(C(A))$, alors $\gamma(A)(\theta)\leq\gamma(C(A))(\theta)$ pour tout $\theta\in[0,t]$. Soit $Z\in(C(A))_\theta=\{Y_{|[0,\theta]}/Y\in C(A)\}$, ce qui montre l'existence de $V\in A$ tel que $Y=C(V)$. D'ailleurs, nous avons $V_{|[0,b_{k_s}]}\in A_{b_{k_s}}(1\leq s\leq r_k)(k=1,...,m_0+1)$, il s'en suit qu'il existe $1\leq f_0\leq s$ pour lequel

$$\|V_{|[0,b_{k_s}]}-M_{i_{f_0}}\|_{X_{k_s}}\leq\gamma(A)(b_{k_s})+\epsilon.$$

Comme $G_l\equiv M_{i_{f_0}}$ sur J_{k_s}, il s'en suit que pour $\theta\in J_{k_s}$, nous avons

$$\mathbb{E}(|V(\theta)-G_l(\theta)|^2)\leq\mathbb{E}(\sup_{J_{k_s}}(|(v(\theta)-G_l(\theta)|^2))$$

$$\leq\|V_{|[0,b_{k_s}]}-M_{i_{f_0}}\|^2_{X_{k_s}} \tag{8.3.10}$$

La continuité uniforme de la fonction $t\longrightarrow\gamma(A)(t)$ implique que pour tout $\theta\in J_{k_s}$, nous avons

$$|\gamma(A)(b_{k_s})-\gamma(A)(\theta)|<\epsilon.$$

Ce qui donne que

$$(\gamma(A)(b_{k_s})+\epsilon)^2\leq(\gamma(A)(\theta)+2\epsilon)^2.$$

Désignons par $\chi_{k_s}^{\tau} = J_{k_s} \bigcap [0, \sup\limits_{0 \leq \theta \leq \tau} f(\theta)]$.

En utilisant les même techniques de la Proposition 8.3.2, nous obtenons

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq \theta \leq \tau} (|(CV)(\theta) - (CG_l)(\theta)|^2) \leq (2\tau + 8)\mathbb{E} \int_0^{\tau} h(\theta) g(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2) d\theta$$

Comme g est concave, il s'en suit que

$$\|(CV) - (CG_l)\|_{X_\tau}^2 \leq (2\tau + 8) \int_0^{\tau} h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta$$

Posons $\kappa = 2\tau + 8$ et $\Re_t = [0, t] \backslash \bigcup\limits_{1 \leq s \leq r_k, k=1,\ldots,m_0+1} f^{-1}(\chi_{k_s}^{\tau})$.

Comme $f^{-1}(\{\chi_{k_s}^{\tau}\}) \bigcap f^{-1}(\{\chi_{r_m}^{\tau}\}) = \emptyset$ $(k \neq r, s = 1, \ldots, r_m, m = 1, \ldots, m_0 + 1)$, nous s'en déduisons que

$$\|(CV) - (CG_l)\|_{X_\tau}^2 \leq \kappa \sum_{k_s, 1 \leq s \leq r_k, k=1,\ldots,m_0+1} \int_{f^{-1}(\{\chi_{k_s}^{\tau}\})} h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta +$$

$$\kappa \int_{\Re_t} h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta$$

Soient

$$I_1 = \kappa \sum_{k_s, 1 \leq s \leq r_k, k=1,\ldots,m_0+1} \int_{f^{-1}(\{\chi_{k_s}^{\tau}\})} h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta$$

et

$$I_2 = \kappa \int_{\Re_t} h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta$$

Le fait que g est croissante et (8.3.10) conduit à

$$I_1 \leq \kappa \int_0^{\tau} h(\theta) g(\gamma(A)(f(\theta)) + 2\epsilon)^2 d\theta$$

La continuité de l'intégrale montre qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $B \subset [0, \tau]$ avec $\lambda(C) < \eta$, nous avons

$$\int_C h(\theta) g(\mathbb{E}(|V(f(\theta)) - G_l(f(\theta))|^2)) d\theta < \frac{\epsilon}{\kappa}$$

De plus , la condition $\mathcal{H}_3$) implique qu'il est toujours possible de choisir δ_2 donné précédément suffisamment petit tel que

$$I_2 < \epsilon.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\|(CV)-(CG_l)\|^2_{X_\tau} \leq \epsilon + \kappa \int_0^t h(\theta)g(\gamma(A)(f(\theta)+2\epsilon)^2 d\theta. \tag{8.3.11}$$

La définition de la mesure de non compacité de Hausdorff combinée avec (8.3.11)conduit à

$$\begin{aligned}(\gamma(A)(t))^2 &\leq (\gamma(C(A)(t)))^2 \leq \|(CV)-(CG_l)\|^2_{X_\tau}. \\ &\leq \epsilon + \kappa \int_0^t h(\theta)g(\gamma(A)(f(\theta)+2\epsilon)^2 d\theta.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les hypothèses $\mathcal{H}_2$), nous obtenons que $\gamma(A) \equiv 0$ ce qui donne le résultat. □

Théorème 8.3.3. *([3] (Theorem 1.5.11)* Soit $A : K \longrightarrow K$ une application définie sur un sous ensemble fermé, borné et convexe K d'un espace de Banach X. Supposons que A est condensante par rapport à la mesure non singulière additive dans le sens général Ψ. Alors, A a au moins un point fixe dans K.

Théorème 8.3.4. L'application $C : X_T \longrightarrow X_T$ définie par(8.3.1) admet un point fixe unique dans X_T.

Preuve. L'existence découle du Théorème 8.3.3, plus précisement, pour τ appartient à l'intervalle $[0, -2+\sqrt{4+\frac{1}{2M}\frac{H}{H+1}}]$, l'inégalité (8.3.8) montre que l'application aléatoire $C : X_\tau \longrightarrow X_\tau$ laisse $\overline{B}_{X_T}(0,\sqrt{H})$ (la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{H}$) invariante ce qui implique l'existence de la solution $X(t)$ dans $X_\tau(\tau \in [0, -2+\sqrt{4+\frac{1}{2M}\frac{H}{H+1}}])$, le résultat dans X_T découle à partir d'un processus de prolongement à tout intervalle $[0,T]$.
Pour l'unicité, nous procédons comme suit : Supposons que $X = X(t)_{t\geq 0}$ et $Y = Y(t)_{t\geq 0}$ sont deux solutions fortes de l'equation (8.2.1) telle que $X(0) = Y(0) = 0$. En d'autre termes

$$X(s) = \int_0^s a_1(\theta, X(f(\theta)))d\theta + \int_0^s a_2(\theta, X(f(\theta)))dw(\theta) \tag{8.3.12}$$

et

$$Y(s) = \int_0^s a_1(\theta, Y(f(\theta)))d\theta + \int_0^s a_2(\theta, Y(f(\theta)))dw(\theta) \tag{8.3.13}$$

Il s'en suit que

$$X(s) - Y(s) = \int_0^s (a_1(\theta, X(f(\theta))) - a_1(\theta, Y(f(\theta))))d\theta +$$

$$\int_0^s (a_2(\theta, X(f(\theta))) - a_2(\theta, Y(f(\theta))))dw(\theta) \tag{8.3.14}$$

En utilisant l'inégalité $(x_1 + x_2)^2 \leq 2x_1^2 + 2x_2^2$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$|X(s) - Y(s)|^2 \leq 2|\int_0^s (a_1(\theta, X(f(\theta))) - a_1(\theta, Y(f(\theta))))d\theta|^2 +$$

$$2|\int_0^s (a_2(\theta, X(f(\theta))) - a_2(\theta, Y(f(\theta))))dw(\theta)|^2 \tag{8.3.15}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne que

$$|X(s) - Y(s)|^2 \leq 2s \int_0^s |(a_1(\theta, X(f(\theta)) -$$

$$a_1(\theta, Y(f(\theta)))|^2 d\theta + 2|\int_0^s (a_2(\theta, X(f(\theta)) - a_2(\theta, Y(f(\theta)))dw(\theta)|^2 \tag{8.3.16}$$

En passant au sup et au espérance et en utilisant l'hypothèse $\mathcal{H}_1$) combinée avec l'inégalité stochastique (8.3.12), nous obtenons que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq u} |X(s) - Y(s)|^2) \leq 2u\mathbb{E}(\int_0^u h(\theta)g(|X(f(\theta) -$$

$$Y(f(\theta))|^2)d\theta + 8(\int_0^u \mathbb{E}(h(\theta)g(|X(f(\theta) - Y(f(\theta))|^2))d\theta \tag{8.3.17}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq u} (|X(s) - Y(s)|^2)) \leq (2T + 8)(\int_0^u h(\theta)g(\mathbb{E}(|X(f(\theta)) - Y(f(\theta))|^2)d\theta \tag{8.3.18}$$

Par la monotonie de l'espérance et la fonction g, nous en déduisons que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq u} (|X(s) - Y(s)|^2)) \leq (2T + 8)(\int_0^u h(\theta)g(\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq \theta} (|X(f(s)) - Y(f(s))|^2)d\theta \tag{8.3.19}$$

Par l'hypothèse $\mathcal{H}_2$), il s'en suit que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq u} |X(s) - Y(s)|^2)) = 0.$$

Pour un élément arbitraire $u \in [0, T]$, et par conséquent $X(t) = Y(t)$, ce qui implique l'unicité de la solution forte. $\square$

8.4 Application à la convergence du processus itératif de Kirk

Théorème 8.4.1. [80] Soient K un sous ensemble convexe d'un espace de Banach et $A : K \longrightarrow K$ une application non expansive. Alors $S(X) = X$ si et seulement si $A(X) = X$.

Soient $T > 0$ et $H = Ke^{K'T}$ le réel qui est une limite supérieure de $\varphi(t) = \|X\|^2_{X_t}(0 \leq t \leq T)$. Nous désignons par $\overline{B}_{X_t}(0, \sqrt{H})$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{H}$ dans X_t.

Théorème 8.4.2. S'il existe $\tau_0 \in [0, -2 + \sqrt{4 + \frac{1}{2M}\frac{H}{H+1}}]$ tel que $C : \overline{B}_{X_{\tau_0}}(0, \sqrt{H}) \longrightarrow \overline{B}_{X_{\tau_0}}(0, \sqrt{H})$ satisfait les condition de Diaz-Metcalf. Alors, pour chaque $x \in \overline{B}_{X_{\tau_0}}(0, \sqrt{H})$, le processus de Kirk $\{S^n(x)\}$ (associé à C) converge vers le point fixe unique de T.

Preuve. D'après le Théorème 8.3.4, il s'en suit que l'application C admet un point fixe unique $X^\star$. En outre, S est une application cendensante . En effet, si K est un sous ensemble borné de $\overline{B}_{X_\tau}(0, \sqrt{H})$ tel que $\gamma(K) > 0$. Alors

$$S(K) \subseteq \lambda_0 K + \lambda_1 C(K) + ... + \lambda_n C^n(K).$$

Donc, par les propriétés : monotonie, semi-additivité et homogeneité, nous obtenons

$$\alpha(S(K)) \leq \lambda_0 \alpha(K) + \lambda_1 \alpha(C(K)) + ... + \lambda_n \alpha(C^n(K)).$$

Le fait que C est condensante montre que

$$\alpha(C(K)) < \alpha(K) \tag{8.4.1}$$

..

$$\gamma(C^n(K)) \leq \gamma(C^{n-1}(K)) \leq .... \leq \gamma(C(K)) < \gamma(K) \tag{8.4.2}$$

et par conséquent

$$\gamma(S(K)) < (\lambda_0 + ... + \lambda_n)\gamma(K) = \gamma(K). \tag{8.4.3}$$

Aussi, en utilisant le Théorème 8.3.3 combiné avec le Théorème 8.4.1, $F(S) = F(C) = \{X^\star\}$.

pour $X \in K$, soit

$$\widetilde{K} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} S^n\{X\}.$$

Nous avons $S(\widetilde{K}) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S^n\{X\} \subset \widetilde{K}$ et comme $\widetilde{K} = \{X\} \bigcup S(\widetilde{K})$, ce qui donne

$$\gamma(\widetilde{K}) = \max\{\gamma(\{X\}), \alpha(S(\widetilde{K})) = \max\{0, \gamma(S(\widetilde{K}))\} = \gamma(S(\widetilde{K}))\}.$$

Comme S est condensante, nous établissons que $\gamma(\widetilde{K}) = 0$, par la propriété de régularité, nous établisons que $\widetilde{K}$ est totalement borné et par conséquent $\overline{\widetilde{K}}$ est compact (comme X_{τ_0} est un espace de Banach), donc la suite $\{S^n(X)\}$ contient une sous suite convergente.

D'autre part, le fait que C satisfait les conditions de Diaz-Metcalf montre que pour tout $X \in \overline{B}_{X_{\tau_0}}(0, \sqrt{H}) \backslash \{X^\star\}$, nous avons

$$\|C(X) - X^\star\| < \|X - X^\star\|,$$

ce qui implique que

$$\|C^k(X) - X^\star\| \leq \|X - X^\star\|. \tag{8.4.4}$$

Ainsi,

$$\|S(X) - X^\star\| = \|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k C^k(X) - X^\star\| \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \|C^k(X) - X^\star\| < \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \|X - X^\star\| = \|X - X^\star\|$$

Alors S satisfait aussi les hypothèses du Théorème 8.4.1, ce qui implique que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S^n(X)$ existe et égale à $X^\star$. $\square$

Remarque 8.4.1. Soient K un sous ensemble borné, fermé et convexe d'un espace de Banach et $A : K \longrightarrow K$ une application. Pour chaque $X \in K$, quelques conditions suffisantes sur A sont donnés pour assurer la convergence ou la convergence faible du processus de Kirk $\{S^n(X)\}$ vers le point fixe de A (voir par exemple [15, 80, 127]) avec la condition supplémentaire que l'espace X est uniformément convexe ou strictement convexe. Malheureusement, dans notre cas l'espace de Banach X_T ni strictement convexe ni uniformément convexe, en effet, il suffit de prendre son sous espace des fonctions $\xi(t)$ indépendent de ω équippé avec sa norme sup qui n'a pas ces propriétés.

Chapitre 9

Propriétés spectrales des équations de transport et résolution d'un problème non-linéaire

9.1 Résumé

Dans ce dernier chapitre, on va focaliser notre étude sur les équations de transport neutroniques, ce chapitre est dévisé en deux parties, linéaire et nonlinéaire. Dans la première, on montre l'indépendance du spectre asymptotique de l'opérateur de transport de p ($\forall 1 \leq p \leq \infty$), ce qui montre que le cas important dans cette direction est celui de l'espace L_1. Malheureusement, c'est le cas le plus délicat. Les techniques de cette partie sont basées sur des résultats de faible compacité sur L_1. En se servant d'elles, on va étudier l'existence d'un problème de transport nonlinéaire monodimensionnel-monoénergétique.

9.2 Introduction et notations

L'équation de Boltzmann (1827) est une équation intégro-différentielle intervenant en théorie cinétique consacrée à l'étude du comportement évolutif d'une particule de gaz (espace des phases, position et vitesse).

L'évolution temporelle de l'état du gaz contenu dans un vaisseau D borné par les parois d'un solide est déterminée sur chaque coté par le comportement des molécules de gaz aux collisions d'un coté et d'un autre coté par l'influence des parois et les forces externes, dans le cas où il n'ya pas de forces externes, cet état est décrit par une fonction scalaire $f(x, v, t)$ qui modélise la fonction de densité des particules de gaz ayant la position x et la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ en temps $t \in \mathbb{R}$. L'intégrale de cette fonction $\int\int_{D\times\mathbb{R}^3} f(x,v,t)dxdv$ donne l'espérance moyenne (moyenne statistique) de la masse totale du gaz contenu dans l'espace des phases $D \times \mathbb{R}^3$. Sous certaines hypothèses, la fonction f satisfait l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,v,t) = -v.\nabla_x f(x,v,t) + J(f(x,.,t))(v) \tag{$\star$}$$

Complétée par les conditions aux bords et les conditions initiales. Le premier terme dans ($\star$) est dit opérateur d'advection qui est responsable du mouvement des particules entre les collisions, tandis que le second $J(f(x,.,t))$ qui est bilinéaire, décrit le méchanisme des collisions. Une solution au problème de la valeur initiale ($\star$) et une preuve du Théorème-H sont données en le traitant sous sa forme abstraite (pour plus de détails, voir [158]).

Cette équation est appliquée aussi pour le transport des photons intervenant dans l'étude des réacteurs nucléaires, incluant des calculs sur la protection contre les radiations et des calculs d'échauffement des matériaux. Le comportement quantique des neutrons se produit par collision avec le noyau, mais pour les physiciens, ces évènements sont considérés comme des évènement 1-temporelles et instantanés et que les conséquences les intéressent. En tenant compte de l'énergie produite par l'incident dû à la collision du neutron avec le noyau, différents types de réactions se produisent. Le neutron peut être absorbé, diffusé ou il cause la fission du noyau. Chaque réaction est caractérisée la section efficace microscopique. Entre les collision, les neutrons se comportent comme les particules classiques, décris par leurs positions. Les particules neutroniques nonchargées bougent le long d'une ligne droite au moins pour les courtes distances pour lesquelles, on néglige l'effet de la gravitation. Les équations neutroniques sont naturellement linéaires. En effet, les intéractions neutron-neutron peuvent être négligés vis-vis des intéractions neutrons-matiéres. La relation entre la densité des neutrons et la densité de propagation du milieu (eau, oxyde uranium,...) est l'ordre 10^{-15}, ce qui justifie cette approximation. Cette hypothèse entraîne à simplifier la version nonlinéaire de l' équation de Boltzmann utilisée dans l'équation cinétique des gaz.

Sans neutrons retardés, ces équations peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,v,t) + v.\nabla_x \psi(x,v,t) - \sigma(v)\psi(x,v,t) + \int_V \kappa(x,v,v')\psi(x,v',t)d\mu(v') = 0 \tag{9.2.1}$$

avec la donnée initiale $\psi(x, v, 0) = \psi_0(x, v)$, où $(x, v) \in D \times V$. D est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, $\mu(.)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu(\{0\}) = 0$ et V (l'espace de vitesses admissibles) désignant le support de μ. La fonction $\psi(x, v, t)$ décrit la distribution des neutrons dans un réacteur nucléaire occupant la région D. Les fonction $\sigma(.)$ et $\kappa(., ., .)$ sont appelées, respectivement, la fréquence et le noyau de collision.

Ici, les conditions aux bords qui représentent les intéractions entre les particules et le milieu ambiant sont données par un opérateur linéaire borné H satisfaisant

$$\psi_- = H(\psi_+) \tag{9.2.2}$$

où ψ_- (resp. ψ_+) est la restriction de ψ à Γ_- (resp. Γ_+) où Γ_- (resp. Γ_+) désigne la partie rentrante (resp. sortante) de l'espace des phases aux bords et H est un opérateur linéaire borné qui envoie un espace fonctionnel sur Γ_+ sur un autre espace fonctionnel sur Γ_-. Les conditions aux bords classiques (absorbantes, réflexions spéculaires, diffusives, périodiques, mixtes...) sont des exemples de notre contexte.

Soient $(x, v) \in \overline{D} \times V$. On définit les nombres réels positifs $t^{\pm}(x, v)$ par

$$t^{\pm}(x, v) = \sup\{t > 0; x \pm sv \in D, \forall\ 0 < s < t\}. \tag{9.2.3}$$

Physiquement, $t^{\pm}(x, v)$ est le temps pris par un neutron initialement $x \in D$ ayant une vitesse $\pm v$ pour atteindre (pour la première fois) le bord D.

Désignons par $\Gamma_{\pm}$ l'ensemble

$$\Gamma_{\pm} = \{(x, v) \in \partial D \times V; \pm v.n_x \geq 0\}, \tag{9.2.4}$$

où n_x est le vecteur unitaire normal au point $x \in \partial D$.

Soit $1 \leq p < \infty$, on introduit les espaces fonctionnels

$$W_p = \{\psi \in X_p \text{ tel que } v.\nabla_x \psi \in X_p\}, \tag{9.2.5}$$

où

$$X_p := L_p(D \times V; dx d\mu(v)). \tag{9.2.6}$$

Les espaces $L_p^{\pm} := L_p(\Gamma_{\pm}; |v.n_x| d\gamma(x) d\mu(v))$. Ici $d\gamma(.)$ est la mesure de Lebesgue sur ∂D.

Rappelons que, pour tout $\psi \in W_p$, on peut définir les traces $\psi_\pm$ sur $\Gamma_\pm$, malheureusement , ces traces n'appartiennent pas à $L_p^\pm$. Ces traces vont appartenir à $L_{p,loc}^\pm$, ou plus présisément à un certain espace à poids L_p(voir [34, 35, 38], pour plus de détails).

On définit maintenant

$$\widetilde{W_p} = \{\psi \in W_p; \psi_{\pm}{}_p^{\pm}\} \tag{9.2.7}$$

Dans ce cas $H \in \mathcal{L}(L_p^+, L_p^-)(1 \leq p < \infty)$ et l'opérateur d'advection T_H est donné comme

$$\left\{ \begin{array}{c} T_H : D(T_H) \subseteq X_p \longrightarrow X_p, \\ \varphi \longrightarrow (T_H\varphi) = -v.\nabla_x\varphi(x,v) - \sigma(v)\varphi(x,v), \end{array} \right. \tag{9.2.8}$$

de domaine

$$D(T_H) = \{\psi \in \widetilde{W_p} \text{ tel que } \psi_- = H(\psi_+)\} \tag{9.2.9}$$

où la fréquence de collision $\sigma(.) \in L_+^\infty(V)$ (en d'autres termes, une fonction bornnée positive).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère le problème aux bords suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda\psi(x,v) + v.\nabla_x\psi(x,v) + \sigma(v)\psi(x,v) = \varphi(x,v), \\ \psi_- = H(\psi_+). \end{array} \right. \tag{9.2.10}$$

Où $\varphi \in X_p$ et la fonction inconnue ψ appartient à $D(T_H)$. Soit

$$\lambda^\star := \mu - ess \inf_{v \in V} \sigma(v). \tag{9.2.11}$$

Pour $Re\lambda + \lambda^\star > 0$, l'équation (9.2.10) peut être résolue comme suit

$$\psi(x,v) = \psi(x - t^-(x,v)v, v)e^{-(\lambda+\sigma(v))t^-(x,v)} + \int_0^{t^-(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x - sv, v)ds. \tag{9.2.12}$$

De plus, si $(x,v) \in \Gamma_+$, l'équation (9.2.10) devient

$$\psi_+(x,v) = \psi_- e^{-(\lambda+\sigma(v))\tau(x,v)} + \int_0^{\tau(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x - sv, v)ds \tag{9.2.13}$$

où $\tau(x,v) = t+(x,v)+t^-(x,v)$. D'autre part, pour tous $(x,v) \in \overline{D}\times V$, on a $(x-t^-(x,v)v, v) \in \Gamma_-$ (pour plus de détails sur les réels t^+, t^- et τ, voir [158]).

Pour une formulation abstraite de l'équation (9.2.12) et (9.2.13), on définit les opérateurs suivants dépendants des paramètres λ.

$$M_\lambda : L_p^- \longrightarrow L_p^+, u \longrightarrow M_\lambda u := ue^{-(\lambda+\sigma(v))\tau(x,v)};$$

$$B_\lambda : L_p^- \longrightarrow X_p, u \longrightarrow B_\lambda u := ue^{-(\lambda+\sigma(v))t^-(x,v)};$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_\lambda : X_p \longrightarrow L_p^+, \\ \varphi \longrightarrow \displaystyle\int_0^{\tau(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds; \end{array} \right. \tag{9.2.14}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} C_\lambda : X_p \longrightarrow X_p, \\ \varphi \longrightarrow \displaystyle\int_0^{t^-(x,v)} e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\varphi(x-sv,v)ds. \end{array} \right.$$

Un calcul utilisant l'inégalité de Hölder montre que tous ces opérateurs sont bornés sur les espaces fonctionnels sur lesquels ils sont définis.

$$\|M_\lambda\| \leq 1, \qquad \|B_\lambda\| \leq (p(Re\lambda + \lambda^\star))^{-\frac{1}{p}}, \tag{9.2.15}$$

$$\|G_\lambda\| \leq (q(Re\lambda + \lambda^\star))^{-\frac{1}{q}}, \quad \|C_\lambda\| \leq \frac{1}{Re\lambda + \lambda^\star} \ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

Opérateurs de collision : L'opérateur de collision K donné comme perturbation de l'opérateur d'advection T_H est défini sur l'espace X_p par

$$K : X_p \longrightarrow X_p$$

$$\psi \longrightarrow \int_V \kappa(x,v,v')\psi(x,v')d\mu(v'), \tag{9.2.16}$$

Notons que l'opérateur K est locale en x, il décrit le scattering physique et la production des particules (fission), donc il peut être vu comme une application

$$K(.) : x \in D \longrightarrow K(x) \in \mathcal{L}(L_p(V)). \tag{9.2.17}$$

On suppose que $K(.)$ est une application strictement mesurable.

$$x \in D \longrightarrow K(x)\varphi \in L_p(V) \text{ est mesurable pour tout } \varphi \in L_p(V) \tag{9.2.18}$$

et bornée

$$\sup_{x\in D} \|K(x)\|_{\mathcal{L}(L_p(V))} < \infty. \tag{9.2.19}$$

Il s'en suit que K définit un opérateur borné de l'espace $L_p(D \times V)$ selon la formule

$$\varphi \in L_p(D \times V) \tag{9.2.20}$$

$(L_p(D \times V) \simeq L_p(D; L_p(V)))$ et

$$\|K(x)\|_{\mathcal{L}(L_p(D\times V))} \leq ess\sup_{x\in D} \|K(x)\|_{\mathcal{L}(L_p(V))} \tag{9.2.21}$$

L'hypothèse finale sur K est

$$K(x) \in \mathcal{K}(L_p(V)) \text{ presque partout,} \tag{9.2.22}$$

où $\mathcal{K}(L_p(V))$ désigne l'espace des opérateurs linéaires compacts sur l'espace $L_p(V)$.

On donne maintenant le concept des opérateurs réguliers introduit par M. Mokhtar-Kharroubi [106].

Définition 9.2.1. Un opérateur de collision

$$K(.) : x \in D \longrightarrow K(x) \in \mathcal{L}(L_p(V)), \tag{9.2.23}$$

est dit régulier si $K(x)$ est compact sur $L_p(V)$ presque partout sur D et

$$K(.) : x \in D \longrightarrow \mathcal{L}(L_p(V)) \tag{9.2.24}$$

est une fonction de Bochner.

L'intérêt de cette classe d'opérateurs réside dans le lemme suivant

Lemme 9.2.1. (voir [106], Proposition 4.1) Un opérateur de collision K peut être approché (au sens de la topologie uniforme) par une suite $\{K_n\}$ d'opérateurs de collision à noyaux de la forme

$$\sum_{i\in I} f_i(x) g_i(\xi) h_i(\xi'), \tag{9.2.25}$$

où $f_i \in L^\infty(D), g_i \in L_p(V)$ et $h_i \in L_q(V)(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ (I est fini).

Il est facile d'observer que l'équation (9.2.1) peut être écrit sous la forme du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = (T_H + K)\psi(t) \quad (t > 0) \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \tag{9.2.26}$$

La théorie spectrale des opérateurs de transport a connu un développement majeur depuis l'apparition des trois papiers pionniers de J. Lehner, M. Wing et K. Jogens à la fin des années 1950 [67, 91, 92]. Une littérature considérable a été consacrée à l'analyse spectrale des équations de transport. Cette analyse a été étudiée au moyen de la nature des paramètres de l'équation (nature des conditions aux bords, nature du domaine des positions ou bien l'espace des vitesses et la nature de l'opérateur de collision). On peut citer, par exemple [4, 8, 9, 14, 17, 18, 25, 33, 38, 44, 52, 55, 56, 67, 69, 70, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 94, 95, 96, 99, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 121, 145, 150, 156, 157, 158, 159, 163, 161].

En général, le comportement asymptotique des solutions de l'équation (9.2.1) est analysé sous deux angles, l'approche résolvante et l'approche semi groupe.

1. *Approche de la résolvante :* Pour $1 < p < \infty$, cette approche est basée essentiellement sur la compacité (ou la compacité d'une itérée) de l'opérateur linéaire borné $(\lambda - T_H)^{-1}K$. En effet, I. Vidav [156] a obsevé que si cette condition est satisfaite, elle entraîne via l'alternative de Fredholm que l'ensemble $\sigma(T_H + K) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > s_H\}$ (σ est le spectre, tandis que s_H est la borne spectrale de l'opérateur T_H) est composé (au plus) d'un ensemble de valeurs propres isolées de multiplicité algébriques finies $\{\lambda_i\}_{i\in J}$, où $\{\lambda_i, Re\lambda_i \geq \alpha\}$ est un ensemble fini pour tout $\alpha > s_H$. Si $p = 1$, il suffit de traiter la faible compacité en tenant compte du fait que le carré d'un opérateur faiblement compact est compact ([45], Corollary 13, p. 510). On rappelle que parmi les résultats pertinents dans cette direction, on cite par exemple, ceux de M. Mokhtar-Kharroubi [106, 108] , K. Latrach [86, 87, 88, 89] et D. Song [150].

   Donc, si T_H engendre un c_0-semi groupe $(U(t); t \geq 0)$, par le théorème de perturbation de Dyson-Phillips, $T_H + K$ engendre un c_0-semi groupe $(V(t); t \geq 0)$ donné par la formule (voir [123], Corollary 7.5, p. 29).

$$V(t)\psi_0 = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\gamma \longrightarrow \infty} \int_{v-i\gamma}^{v+i\gamma} e^{\lambda t}(\lambda - T - K)^{-1}\psi_0 d\lambda \qquad (t > 0) \qquad (9.2.27)$$

   (où v est suffisamment large), en déformant le contour de l'intégration dans la formule de Dunford. En recouvrant les résidus correspondants à ces pôles (valeurs propres de $T_H + K$), on peut obtenir une bonne compréhension du comportement asymptotique de la solution quand la donnée initiale ψ_0 appartient à $D(T_H+K)^2$ (malheureusement cette condition de régularité n'est pas naturelle).

2. *Approche de semi groupe :* Même dans le cas où $\sigma(T_H+K)\bigcap\{\lambda\in\mathbb{C} : Re\lambda > s_H\}$ est réduit à des valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies, l'ensemble $\sigma(V(t))\bigcap\{\eta\in\mathbb{C} : |\eta| > e^{s_Ht}\}$ peut contenir du spectre continu, ceci est dû à l'absence d'un théorème de l'application spectrale pour l'application $\lambda \longrightarrow e^{t\lambda}$. I. Vidav [157] a montré que le comportement asymptotique de $V(t)_{t\geq 0}$ est lié à l'analyse de son spectre et la compacité du reste d'ordre n de la série de Dyson-Phillips $R_n(t) = \sum_{j=n}^{\infty} U_j(t)$ (où $U_0(t) = U(t)$ et $U_n(t) = \int_0^t U(t-s)KU_{n-1}(s)ds$ pour tout $n\geq 1$) est un outil crucial pour exclure l'absence du spectre continu et restaurer le théorème suivant de l'application spectrale

$$\sigma(V(t))\bigcap\{\eta\in\mathbb{C} : |\eta| > e^{s_Ht}\} = e^{t\sigma(T_H+K)}\bigcap\{e^{t\lambda} : \lambda > s_H\}. \tag{9.2.28}$$

Cette technique a l'avantage de n'imposer aucune condition sur la donnée initiale, elle a été utilisée par [108, 156, 157, 160] et d'autres auteurs pour étudier le comportement asymptotique des solutions des équations de transport pour des conditions aux bords absorbantes ($H=0$) ou $\psi_{|\Gamma_-}=0$, en d'autres termes, elle a été utilisée dans le cas où chaque neutron qui arrive au bord ∂D de l'intérieur de D disparaît et aucun neutron arrive de l'extérieur et où D est borné. Plusieurs contributions ont été réalisées dans cette direction, montrant en particulier la compacité du reste d'ordre 2 de la série de Dyson-Phillips, aussi pour le cas des conditions aux bords non-absorbantes ($H\neq 0$) et moyennant un calcul assez lourd, d'autres résultats ont été effectués. Récemment et toujours pour le cas des conditions aux bords absorbantes, en utilisant des opérateurs de collisions réguliers et en supposant que le domaine des positions a un volume fini (non nécessairement borné). Mokhtar-Kharroubi [112] a établi la compacité du reste d'ordre 1 de la série Dyson-Phillips sur les espaces $L_p(D\times V)(1<p<\infty)$. Cette analyse simplifie considérablement l'analyse spectrale des équations du transport et étend tous les résultats connus dans ce context notamment, l'étude de la compacité du reste d'ordre deux, ceci est dû au fait que si $R_n(t)$ est compact, alors $R_{n+1}(t)$ est aussi compact et implique que $(U(t))_{t\geq 0}$ et $(V(t))_{t\geq 0}$ ont le même spectre essentiel et par suite, le même type essentiel. Malheureusement, cet argument ne peut pas s'appliquer au cas $p=1$ car sa preuve a été obtenu tout d'abord sur l'espace $L_2(D\times V)$ (et a été généralisée aux espaces $L_p(D\times V),(1<p<\infty)$ moyennant des techniques d'interpolation utilisant quelques propriétés de la transformée de Fourier et les opérateurs de Hilbert-Schmidt. Mieux que ça, M. Mokhtar-Kharroubi a conjecturé que $R_1(t), t>0$ n'est pas compact sur $L_1(D\times V)$, aussi sa faible compacité est un problème ouvert (voir [106], Problem 7, p. 94).

Dans ce travail, on étudie l'impact des résultats de compacité sur la p-indépendence du spectre asymptotique de l'opérateur de transport A_H. Ces résultats sont établis au moyen de propriétés géométriques de l'espace des positions D et la mesure de Radon μ ayant l'espace des vitesses V comme support et la nature de l'opérateur de collision K avec celle de l'opérateur aux bords H.

9.3 Résultats principaux

9.3.1 Résultats de compacité et p-indépendence de $\sigma_s(A_H)$.

On suppose que la mesure μ satisfait la propriété géométrique spécifique suivante

$$\int_{c_1\leq\|x\|\leq c_2} d\mu(x)\int_0^{c_3}\chi_A(tx)dt \text{ quand } |A|\longrightarrow 0, \tag{9.3.1}$$

pour tous $0<c_1<c_2<\infty$ et $c_3<\infty$, où $|A|$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble A et χ_A la fonction indicatrice de A.

Remarque 9.3.1. Comme il a été indiqué dans ([106], Remark 4.3), la condition ci-dessus est satisfaite par la mesure Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ ou sur la sphère (modèle multi groupe).

On commençe notre analyse par le résultat fondamental de compacité qui va être utilisé dans la suite de cette section

Théorème 9.3.1. Si $p=1$. Soit $H\in\mathcal{L}(L_1^+,L_1^-), \|H\|<1$ faiblement compact et μ une mesure de Radon satifaisant la condition (9.3.1). Supposons l'opérateur de collision K est régulier. Alors,

($\imath$) Si D est borné, alors $K(\lambda - T_H)^{-1}K$ est faiblement compact sur $L_1(D \times V, dxd\mu)$.

($\imath\imath$) Si D est un ensemble borné convexe sur $\mathbb{R}^n$ et H compact, alors $K(\lambda - T_H)^{-1}K$ est compact sur $L_1(D \times V, dxd\mu)$.

Preuve. Si $\|H\| < 1$, alors T_H engendre un c_0-semi groupe $(U_H(t); t \geq 0)$ sur X_1, et sa résolvante existe comme opérateur linéaire borné satisfaisant

$$(\lambda - T_H)^{-1} = \Gamma_\lambda^H + C_\lambda \tag{9.3.2}$$

où $\Gamma_\lambda^H = \sum_{n\geq 0} B_\lambda H(M_\lambda H)^n G_\lambda$, et

$$\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda + \lambda^\star} \qquad (Re\lambda > -\lambda^\star) \tag{9.3.3}$$

Donc

$$K(\lambda - T_H)^{-1}K = K\Gamma_\lambda^H K + KC_\lambda K. \tag{9.3.4}$$

Il est clair que, si H est faiblement compact, alors Γ_λ^H est faiblement compact. D'autre part, il est facile d'observer que C_λ n'est autre que la résolvante de l'opérateur d'advection avec des condition aux bords absorbantes ($H = 0$) noté T_0. Maintenant, sous les conditions (9.3.1) et par application de ([106], Theorem 4.4 ($\imath$)), on obtient que $K(\lambda - T_0)^{-1}K$ est faiblement compact sur X_1 si D est borné . De plus, si D est convexe, alors par application de ([106], Theorem 4.4 ($\imath\imath$)), on obtient la compacité de l'opérateur $K(\lambda - T_0)^{-1}K$. Comme les propriétés de compacité et faible compacité concernant les opérateurs linéaires bornés est stable par sommation, on obtient le résultat désiré. $\square$

Question 1. Il est bien connu que pour $1 < p < \infty$ et si l'opérateur aux bords H est compact, alors T_H engendre un c_0-semi groupe $(U_H(t); t \geq 0)$ sur X_p (voir [96], Theorem 6.8), le résultat est il vrai pour $p = 1$ sous l'hypothèse que H est faiblement compact de norme ≥ 1 ?

Soit $(D_i, \mu_i), i = 0, 1,$ des espaces mesurés avec μ_i des mesures σ-finies .

Théorème 9.3.2. (Riesz-Thorin theorem) On suppose que $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$ pour $i = 0, 1,$ et soit T un opérateur linéaire qui envoie $L_{p_i}(D_0, \mu_0)$ continuêment dans $L_{q_i}(D_1, \mu_1)$ de norme

M_i. Si $0<\theta<1$ et $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}, \dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$, alors T envoie $L_p(D_0,\mu_0)$ continuêment dans $L_q(D_1,\mu_1)$ avec une norme $M\leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.

Ce théorème montre que la bornitude des opérateurs linéaires peut être interpollée entre les espaces L_p. En 1960, Krasnoselskii [82] a montré que la copmacité peut aussi être interpollé. Donc, on peut annoncer le résultat suivant

Théorème 9.3.3. On suppose que $1\leq p_i,q_i\leq\infty$ pour $i=0,1$, et soit $T:L_{p_i}(D_0,\mu_0)\longrightarrow L_{q_i}(D_1,\mu_1)$ compact. Si $0<\theta<1$ et $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}, \dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$, alors $T:L_p(D_0,\mu_0)\longrightarrow L_q(D_1,\mu_1)$ est aussi compact.

En tenant compte du Théorème 9.3.3 et ([40], Corollary 1.6.2), le lemme suivant peut être obtenu.

Lemme 9.3.1. Soit $1\leq p_0,p_1<\infty$. On suppose que l'opérateur linéaire $T:L_{p_0}(D)\bigcap L_{p_1}(D)\longrightarrow L_{p_0}(D)\bigcap L_{p_1}(D)$ peut être étendu à un opérateur linéaire borné sur $L_{p_i}(D),(i=0,1)$ tels que au moins l'un d'eux a une puissance compact. Alors

($\imath$) T peut être étendu à un opérateur à puissance compact sur $L_s(D)$ pour tout $s\in(p_0,p_1)$;

($\imath\imath$) On note l'extension de T à $L_s(D)$ par T_s. Si T_{p_i} est à puissance compact, alors $\sigma(T_s)=\sigma(T_{p_i})$ pour tout $s\in(p_0,p_1)$ et les projections spectrales correspondantes aux valeurs propres sont indépendantes de p.

Soit T_H^p (resp., A_H^p) l'opérateur fermé à domaine dense T_H (resp., A_H) sur les espaces $X_p,(1\leq p<\infty)$. On note par K_p et $(U_H^p(t);t\geq 0)$ l'opérateur linéaire borné K et $(U_H(t);t\geq 0)$ définis sur X_p. Soit $\sigma_s^p(A_H)=\sigma(A_H^p)\bigcap\{\lambda\in\mathbb{C}/Re\lambda>-\lambda^\star\}$ (le spectre asymptotique de l'opérateur A_H^p).

Maintenant, on établit le résultat fondamental de cette partie qui décrit la p-indépendence de $\sigma_s^p(A_H)$.

Théorème 9.3.4. Sous les hypothèses du Théorème 9.3.1, on a

($\imath$) $\sigma_s^p(A_H)=\sigma_s^1(A_H)$ pour tout $p>1$;

(ii) Si $\lambda \in \sigma_s^p(A_H) = \sigma_s^1(A_H)$, on a $\mathcal{N}((\lambda - A_H^p)^m) = \mathcal{N}((\lambda - A_H^1)^m)$ pour tout entier positif m et tout $p > 1$, où $\mathcal{N}(T)$ désigne le noyau de T. Comme conséquence, on a les multiplicités géométrique et algébrique de λ sont p-indépendentes.

Preuve. Soit $p > 1$, on a

$$K_{p|L_p \bigcap L_1} = K_{1|L_p \bigcap L_1}, \; U_H^p(t)_{|L_p \bigcap L_1} = U_H^1(t)_{|L_p \bigcap L_1} \quad (t \geq 0) \tag{9.3.5}$$

La résolvante de T_H^p peut être écrite sous la forme de la transformée de Laplace $U_H^p(t)$ comme suit

$$(\lambda - T_H^p)^{-1}\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_H^p(t)\varphi dt \tag{9.3.6}$$

Donc, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > -\lambda^\star$, on obtient

$$(\lambda - T_H^p)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} = (\lambda - T_H^1)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} \tag{9.3.7}$$

En appliquant le Théorème 9.3.1, on obtient la compacité de $((\lambda - T_H^1)^{-1}K_1)^2$ sur $L_1(D \times V)$. D'autre part le Lemme 9.3.1 implique la compacité de $((\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^2$ sur $L_p(D \times V)$ et par suite $\sigma(((\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^2) = \sigma(((\lambda - T_H^1)^{-1}K_1)^2)$ pour tout $p > 1$. Donc, le théorème de Gohberg-Schmul'yan ([70], Theorem 11.4) montre que $\sigma_s^p(A_H)$ est formé d'un ensemble discret de valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies. De plus, il est facile d'observer que $1 \in \sigma(((\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^2)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma_s^p(A_H)$, donc, en tenant compte de l'assertion (ii) du Lemme 9.3.1, on déduit que $\sigma_s^p(A_H) = \sigma_s^1(A_H)$ pour tout $p \geq 1$.

Ensuite, l'estimation (9.3.3) montre que $\lim\limits_{Re\lambda \longrightarrow +\infty} \|(\lambda - T_H^p)^{-1}K_p\| = 0$. Ceci donne que pour $Re\lambda$ suffisamment grand , on a

$$(I - (\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}((\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^j \tag{9.3.8}$$

Donc, pour $Re\lambda$ suffisamment grand, il s'en suit que

$$(I - (\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} = (I - (\lambda - T_H^1)^{-1}K_1)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} \tag{9.3.9}$$

En utilisant l'analyticité de $\lambda \longrightarrow (I-(\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^{-1}$ sur l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > -\lambda^\star\}\backslash\sigma_s^p(A_H)$ pour tout $p \geq 1$, on obtient que

$$\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C}/Re\mu > -\lambda^\star\}\backslash\sigma_s^p(A_H) = \{\mu \in \mathbb{C}/Re\mu > -\lambda^\star\}\backslash\sigma_s^1(A_H) \tag{9.3.10}$$

on a

$$(I-(\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} = (I-(\lambda - T_H^1)^{-1}K_1)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} \tag{9.3.11}$$

En utilisant la formule $(\lambda - A_H^p)^{-1} = (I-(\lambda - T_H^p)^{-1}K_p)^{-1}(\lambda - T_H^p)^{-1}$ pour tout $p \geq 1$ et $\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C}/Re\mu > -\lambda^\star\}\backslash\sigma_s^p(A_H)$, on obtient que

$$(\lambda - A_H^p)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} = (\lambda - A_H^1)^{-1}_{|L_p \bigcap L_1} \tag{9.3.12}$$

pour tout $\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C}/Re\mu > -\lambda^\star\}\backslash\sigma_s^p(A_H)$.

Maintenant, si on note par $\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)$ la projection spectrale correspondante à la valeur propre ζ de A_H^p, alors pour $\beta > 0$ suffisamment petit,

$$\mathcal{P}_\lambda(A_H^p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-\zeta|=\beta}(z - A_H^p)^{-1}dz \tag{9.3.13}$$

En tenant compte des équations (9.3.12) et (9.3.13), il s'en suit que $\lambda \in \sigma_s^p(A_H) = \sigma_s^1(A_H)$

$$\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)_{|L_p \bigcap L_1} = \mathcal{P}_\lambda(A_H^1)_{|L_p \bigcap L_1} \tag{9.3.14}$$

Comme l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à supports compact $\mathcal{C}_0^\infty(D \times V)$ est dense dans X_p, alors $\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(\mathcal{C}_0^\infty(D\times V))$ est dense dans $\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(X_p)$, mais ces deux espaces sont de dimension finies, alors

$$\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(\mathcal{C}_0^\infty(D \times V)) = \mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(X_p) \qquad (p \geq 1) \tag{9.3.15}$$

En tenant compte des équations (9.3.14) et (9.3.15), on obtient que $\mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(X_p) = \mathcal{P}_\lambda(A_H^1)(X_1)$ pour tout $p \geq 1$ et $\lambda \in \sigma_s^p(A_H)$. Comme pour tout $k \geq 1$, on a $\mathcal{N}((\lambda - A_H^p)^k) \subset \mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(X_p) = \mathcal{P}_\lambda(A_H^1)(X_1)$ et $\mathcal{N}((\lambda - A_H^1)^k) \subset \mathcal{P}_\lambda(A_H^1)(X_1) = \mathcal{P}_\lambda(A_H^p)(X_p)$, il s'en suit que $\mathcal{N}((\lambda - A_H^1)^k) = \mathcal{N}((\lambda - A_H^p)^k) \subset X_p \bigcap X_1$.

Dans le cas où H est faiblement compact, on utilise la compacité de l'opérateur $[(\lambda - T_H^1)^{-1})K_1]^4$.

Dans le même esprit que le théorème précédent, on peut prouver le résultat suivant sans l'hypothèse de faible compacité sur H et sans la propriété géométrique (9.3.1) et la bornitude D mais basée sur la faible compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips.

Soit $\varrho_s^p(A_H) = \sigma(A_H^p) \bigcap \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > s(T_H)\}$ ou $s(T_H)$ est la borne spectrale de l'opérateur T_H dans X_p pour tout $p \geq 1$.

Proposition 9.3.1. Soit K un opérateur de collision régulier et soit $H \in \mathcal{L}(L_p^+, L_p^-)(1 \leq p < \infty)$ tel que T_H engendre un c_0-semi groupe $(U_H(t); t \geq 0)$ sur X_p. Si l'un des termes $R_n^H(t)$ est faiblement compact sur X_1, alors

($\imath$) $\varrho_s^p(A_H) = \varrho_s^1(A_H)$ pour tout $p > 1$;

($\imath\imath$) Si $\lambda \in \varrho_s^p(A_H) = \varrho_s^1(A_H)$, alors $\mathcal{N}((\lambda - A_H^p)^m) = \mathcal{N}((\lambda - A_H^1)^m)$ pour tout entier positif m et pour tout $p > 1$. Comme conséquence, les multiplicités algébrique et géométrique de λ sont p-indépendentes.

Preuve. En tenant compte du Théorème 9.3.4, il suffit de montrer qu'il existe $m \geq 1$ tel que $((\lambda - T_H)^{-1}K)^m$ est compact pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda > s(T_H)$. En effet, on suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $R_n^H(t)$ est faiblement compact sur X_1. Alors, en tenant compte de ([106], Theorem 2.6), $U_n(t) = ([UK]^n * U)(t)$ est faiblement compact et par suite par ([106], Theorem 2.3), l'intégrale stricte

$$\int_0^N e^{-\lambda t} U_n(t) dt \text{ est faiblement compact sur } X_1 \tag{9.3.16}$$

D'autre part, on a

$$\int_0^N e^{-\lambda t} U_n(t) dt \longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_n(t) dt \text{ in } \mathcal{L}(X_1) \tag{9.3.17}$$

Donc $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} U_n(t) dt$ est faiblement compact sur X_1. Comme la transformé de Laplace de $([UK]^n * U)(t)$ n'est autre que $((\lambda - T_H)^{-1}K)^n(\lambda - T_H)^{-1}$, ceci donne la faible compacité de $((\lambda - T_H)^{-1}K)^n(\lambda - T_H)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ où ω est le type de $(U_H(t); t \geq 0)$, par des arguments d'analyticité, on obtient que $((\lambda - T_H)^{-1}K)^n(\lambda - T_H)^{-1}$ est faiblement compact pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > s(T_H)$ et implique la compacité de $((\lambda - T_H)^{-1}K)^{2n+2}$ et donne le résultat. $\square$

Maintenant, on va focaliser notre attention sur le cas de la géométrie plane.

Théorème 9.3.5. Si $D =]-a, a[, V = [-1, 1], \mu = v$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) et H un opérateur aux bords linéaire borné de L_p^+ vers L_p^-, alors

($\imath$) $\sigma_s^p(A_H) = \sigma_s^1(A_H)$ pour tout $p > 1$;

($\imath\imath$) Si $\lambda \in \sigma_s^p(A_H) = \sigma_s^1(A_H)$, alors $\mathcal{N}((\lambda - A_H^p)^m) = \mathcal{N}((\lambda - A_H^1)^m)$ pour tout entier positif m et tout $p > 1$. Comme conséquence, les multiplicités algébrique deλ sont p-indépendentes.

Preuve. Ici, le temps de séjour de la particule dans D est minoré par $2a$; Ceci est dû au fait que $\inf\{\tau(x, v); (x, v) \in \Gamma_+\} = 2a > 0$. Comme conséquence immédiate, T_H engendre un c_0-semi groupe pour tout opérateur linéaire borné H ([94], Remark 6). De plus, on a

$$\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \leq \frac{\alpha}{Re\lambda + \lambda^\star} (\forall \lambda \in \Lambda_0) \tag{9.3.18}$$

où α est une constante positive dépendante de $\|H\|$ et $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \lambda_0\}$ avec

$$\lambda_0 = \begin{cases} -\lambda^\star \text{ if } \ \|H\| \leq 1 \\ -\lambda^\star + \dfrac{1}{2a} ln(\|H\|) \text{ if } \ \|H\| > 1 \end{cases} \tag{9.3.19}$$

D'autre part, on a $((\lambda - T_H)^{-1}K)^2$ est compact pour tout $1 \leq p < \infty$ ([87], Theorem 2.1) . En adoptant, les mêmes techniques de la preuve du Théorème 9.3.4, on obtient le résultat désiré. $\square$

Remarque 9.3.2. On note que $K(\lambda - T_H)^{-1}$ n'est en général pas faiblement compact sur $L_1(D \times V)$ (voir [52]).

Question 2. Dans le cas de la géométrie plane, l'opérateur $(\lambda - T_H)^{-1}K$ est- il faiblement compact sur $L_1(]-a, a[\times[-1, 1])$ sous les hypothèses que μ est une mesure diffuse (non atomique) sur $\mathbb{R}$?

9.3.2 Problème de transport non linéaire en géométrie plane

Le but de cette partie est de démontrer l'existence de solutions d'un problème non linéaire général intervenant dans le cadre des équations de transport en géométrie plane sur l'espace X_1 (sous les notations de la partie précedente). Tout d'abord, on va définir la classe Υ par

$$\Upsilon = \{K \in \mathcal{L}(X_1) \text{ tel qu'il existe } \lambda \in \rho(T_H) \text{ avec } (\lambda - T_H)^{-1}K \text{ faiblement compact sur } X_1\}$$

On note que $\Upsilon \neq \phi$ car $O_{x_1} \in \Upsilon$. On se donne le problème suivant

$$\begin{cases} \lambda\psi(x,\zeta) + \zeta\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,\zeta) + \sigma(\zeta)\psi(x,\zeta) = KN\psi \\ \psi^- = H(\psi^+). \end{cases} \tag{9.3.20}$$

où N est un opérateur nonlinéaire continu satisfaisant la condition (9.3.20) et qui laisse invariant les ensembles bornés de X_1. La question est de savoir, si le problème (9.3.20) admet ou non une solution dans X_1. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant.

Théorème 9.3.6. Pout tout $K \in \Upsilon$ et pour tout $r > 0$, il existe $\lambda_r > 0$ tel que pour tout λ satisfaisant $Re\lambda > \lambda_r$, le problème (9.3.20), admet au moins une solution dans $B_r = \overline{B_{X_1}}(0,r)$.

Preuve. Il est facile de voir que le problème (9.3.20) peut être transformé à un problème de point fixe donné sous la forme

$$\psi = S(\lambda), \qquad \psi^- = H(\psi^+).$$

où $S(\lambda) = (\lambda - T_H)^{-1}KN$. D'après l'hypothèse sur N et les propriétés des applications linéaires bornés, on constate que l'opérateur $S(\lambda)$ est continu et envoie les partie bornées de l'espace X_1 sur elles- mêmes.

Soit $r > 0$ et $\psi \in B_r$. Il vient que

$$\|S(\lambda)\psi\| \leq \|(\lambda - T_H)^{-1}\|\|K\|\|N\psi\| \leq \frac{\|K\|\alpha_r B_H}{Re\lambda + \lambda^*}$$

où $\alpha_r = \sup\limits_{\theta \in B_r} \|N(\theta)\|$ et B_H satisfait l'inégalité $\|(\lambda - T_H)^{-1}\| \leq \dfrac{B_H}{Re\lambda + \lambda^*}$ avec B_H peut être pris égale à 1 si $\|H\| < 1$. Soit $\gamma_r = \dfrac{\|K\|\alpha_r B_H}{r} - \lambda^*$. Alors si $Re\lambda \geq \gamma_r$, on a $S(\lambda)(B_r) \subseteq B_r$. Comme $K \in \Upsilon$ alors $(\lambda - T_H)^{-1}K$ est faiblement compact sur X_1. On déduit que pour $Re\lambda \geq \lambda_r, S(\lambda)$ satisfait les hypothèses du 1.4.3. Ceci termine la preuve. $\square$

Exemple 9.3.1. Dans le cas où K est un opérateur de collision régulier et N_f est l'opérateur de Nemytskii donné par

$$(N_f\psi)(x,\zeta) = f(x,\zeta,\psi(x,\zeta)).$$

On a $K \in \Upsilon$ et N_f satisfait les hypothèses imposées sur N dans le Théorème 9.3.6 où f satisfait les hypothèses de Carathéodory, le résultat a été obtenu par K. Latrach et al (voir [85]).

Bibliographie

[1] M. Abbas, T. Nazir and H. Aydi, *Fixed points of generalized graphic contraction mappings in partial metric spaces endowed with a graph,* J. Adv. Math. Stud., 6 (2) (2013), 130-139.

[2] R. Agarwal, M. Meehan and D. O'regan, *Fixed point theory and applications,* Cambridge Univesity Press, 2004.

[3] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing operators,* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[4] S. Albertoni and B. Montagnini, *On the spectrum of neutron transport equation in finite bodies,* J. Math. Anal. Appl., 13 (1966), 19-48.

[5] M. U. Ali , T. Kamran, E. Karapınar, *Fixed points of α-ψ contractive type mappings in uniform spaces,* Fixed Point Theory and Appl., (2014), 2014 :150.

[6] M. U. Ali, T. Kamran, N. Shahzad, *Best proximity point for α-ψ proximal contractive multimaps,* Abstract and Appl. Analysis, (2014), Article ID :181598, 6 pages.

[7] D. E. Alspach, *A fixed point free nonexpansive map,* Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981), 423-424.

[8] N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu, *Linear monoenergetic transport with reflecting boundary conditions,* Rev. Roum. Phys., 19 (1974), 17-26.

[9] N. Angelescu, N. Marinescu and V. Protopopescu, *Neutron transport with periodic boundary conditions,* Trans. Theor. Stat. Phys., 5 (1976), 115-125.

[10] H. Aydi, E. Karapınar and B. Samet *Fixed points for generalized $(\alpha - \psi)$ contractions on generalized metric spaces*, Journal of Inequalities and Applications, 2014 :229 (2014).

[11] H. Aydi, M. Jellali, E Karapınar, *Common fixed points for generalized α-implicit contractions in partial metric spaces : Consequences and application*, RACSAM, Doi : 10.1007/s13398-014-0187-1, (2014).

[12] J. M. Ayerbe, T. Dominguez and G. Lopez, *Measure of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhauser, 1997.

[13] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,* Fund. Math., 3 (1922), 133-181.

[14] J. Banasiac and L. Arlotti, *Perturbations of positive semigroups with applications,* Springer Monographs in Mathematics, 2006.

[15] U. Barbuti and S. Guerra, *Un Teorema costruttivo di punto fisso negli spazi di Banach,* Rendiconti. dell' Istituto. di matematica. dell' Universita di Trieste., 4 (1972), 115-122.

[16] T. D. Benavides, *Some questions in the metric fixed point hteory, by A. W. Kirk,* revisited. Arab. J. Math., Vol 1., (4) (2012), 431-438.

[17] R. Beals and V. Protopopescu, *Abstract time-dependent transport equations,* J. Math. Anal. Appl., 121 (1987), 370-405.

[18] A. Belleni-Morante, *Neutron transport in a nonuniform slab with generalized boundary conditions,* J. Math. Phys, 11 (1970), 1553-1558.

[19] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration,* Nonlinear. Anal. Forum., 9(1) (2004), 43-53.

[20] V. Berinde, *A priori and a posteriori error estimates for a class of φ-contractions,* Bull. Appl. Compu. Math., (1999), 183-192.

[21] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points,* Springer, 2006.

[22] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points,* Editura efemeride. Baia Mare. Roumania., (2002).

[23] R. Bianchini, *Sur un problema di S. Reich ringuardante la teoria dei punti fissi,* Boll. Un. Math. Ital., 5 (1972), 103-108.

[24] K. C. Border, *Fixed point theorems with applications to economics and games theory,* CUP. (1990).

[25] M. Borysiewicz and J. Mika, *Time behaviour of thermal neutrons in moderating media,* J. Math. Anal. Appl., 26 (1969), 461-478.

[26] D. W. Boyd and J. S. Wong, *On nonlinear contractions,* Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[27] A. Branciari, *A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type,* Inter. Jour. Math. Mathematical. Sci., 29 (9) (2002), 531-536.

[28] M. S. Brodskii and P. Milman *On the center of a convex set,* Dokl. Akad. Nauk. sssk., 59 (1948), 838-840.

[29] R. M. Brooks and K. Schmitt, *The contraction mapping principle and some applications,* Elec. J. Diff. Equa, Monograph 09, 2009.

[30] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space,* Proc. Nat. Acad. Sci USA., 54 (1965), 1041-1044.

[31] W. L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach space,* Pacific. J. Math., 86 (1980), 427-436.

[32] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying indwardness condition,* Tran. Amer. Math. Soc., 215(1976), 241-251.

[33] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications,* Springer Verlag. Appl. Math. Sci, 67, 1988.

[34] M. Cessenat, *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique,* C.R. Acad. Sc. Paris., (299) (1984), Série 1, n^0 16.

[35] M. Cessenat, *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique,* C.R. Acad. Sc. Paris., (300) (1985), Série 1, n^0 3.

[36] S. Chatterjea, *Fixed point theorems,* C. R. Acad. Bulgare. Sci., 25(1972), 727-730.

[37] L. Ciric, *A generalization of Banach's contraction principle,* Proc. Amer. Math. Soc., 45(1974), 267-273.

[38] R. Dautray and J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique, Tome 9,* Masson, Paris, 1988.

[39] B. K. Dass and S. Gupta, *An extension of Banach contraction principle through rational expression,* Indian. Jour. pure. Appl, Math., 6(1975), 1455-1458.

[40] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory,* Cambridge : Cambridge University Press, 1989.

[41] J. B. Diaz and F. T. metcalf, *On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations,* Bull. Amer. Math. Soc., 73(191967), 516-519.

[42] J. B. Diaz and F. T. metcalf, *On the set of subsequential limit points of successive approximations,* Trans. Amer. Math. Soc., 135(1969), 459-485.

[43] W. G. JR. Dotson, *On the Mann iterative process,* Trans. Amer. Math. Soc., 149(1970), 65-73.

[44] J. J. Duderstadt and W. R. Martin, *Transport theory,* John Wiley-Sons, New York, NY, USA, 1979.

[45] N. Dunford and T. T. Schwartz, *Linear operators, General theory Part I,* Interscience, New-York, 1958.

[46] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle,* Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7-10.

[47] B. Fisher, *On a theorem of Khan,* Riv. Math. Univ Parma., 4 4 (1978), 135-137.

[48] B. Florin, *Fixed points theorems in metric spaces endowed with a graph,* PH. D thesis, North University of Baia Mare (Faculty of Science), 2012.

[49] M. Furi and A. Vignoli, *A fixed point theorem in complete metric spaces,* Boll. Un. Math. Ital., 4-5 (1969), 505-509.

[50] I. I. Gikhman and A. V. Skorohod, *Introduction to the theory of random processes,* (in Russian), Nauka Press, Moscow, 1965.

[51] I. L. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points,* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1)(1952), 170-174.

[52] F. Golse, P. L. Lions, B. Perthame and R. Sentis, *Regularity of the momemts of the solution of a transport equation,* J. Func. Anal., 76 (1988), 110-125.

[53] K. Goebel and W. A. Kirk, *Fixed points theorems in metric spaces endowed with a graph,* PH. D thesis, North University of Baia Mare (Faculty of Science), 2012.

[54] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory,* Cambridge University Press, 1990.

[55] W. Greenberg, C. Van der Mee and V. Protopopescu, *Boundary value problems in abstract kinetic theory,* Birkhäuser, Basel, 1987.

[56] G. Greiner, *Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equations,* Math. Z., 185 (1984), 167-177.

[57] Gupta A N, Saxena A, *A unique fixed point theorem in metric spaces,* The. Math. Student., 52 (1984), 156-158.

[58] A. M. Harder , *Fixed point theory and stability result for fixed points iteration procedures,* PHD Thesis University of Missouri-Rolla ., 4 (1987).

[59] A. M. Harder and T. Hicks, *A stable iteration procedure for nonexpansive mapping,* Math. Japonica., 33 (1988), 687-692.

[60] A. M. Harder and T. Hicks, *Stability results for fixed point iteration procedures,* Math. Japonica., 33 (1988), 693-706.

[61] G. Hardy and T. Rogers, *Topics in metric Fixed Point Theory,* Cambridge University Press, 1990.

[62] C. O. Imoru, M. O. Olatinwo, G. Akinbo and A. O. Bossede, *On a version of Banach's fixed point theorem,* general. Math., (16) (1)(2008), 25-32.

[63] S. Ishikawa, *Fixed point and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc., 59 (1976), 65-71.

[64] S. Ishikawa, *Fixed point and iteration of a nonexpansivemapping in a Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1976), 147-150.

[65] D. S. Jaggi, *Some unique fixed point theorems,* Indian. J. Pure. Appl. Math., Vol.8, 2 (1977), 223-230.

[66] T. Yamada and S. Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. I,* J. Math. Kyoto. Univ., 11, No. 1, (1971), 155-167 ; II, 11, No. 3 (1971), 533-563. .

[67] K. Jörgens, *An Asymptotic expansion in the theory of neutron transport,* Comm. Pure. Appl. Math., 11 (1958), 219-242.

[68] R. Kannan, *Some results on fixed points,* Bull. Calcutta. Math. Soc., 60 (1968), 71-76.

[69] H. G. Kaper, *the initial-value transport problem for monoenergetic neutrons in an infinite slab with delayed neutron production,* J. Math. Anal. Appl., 19 (1967), 207-230.

[70] H. G. Kaper, C. G. Lekkerkerker and J. Hejtmanek, *Spectral methods in linear transport theory,* Birkhäuser, 1982.

[71] E. Karapinar and B. Samet, *Generalized $\alpha - \psi$ contractive type mappings and related fixed point theorems with applications,* Abstract. Appl. Anal., (2012), Article ID 973486, 17 pages.

[72] E. Karapinar, *Fixed point theory for cyclic φ-contraction,* Appl. Math. Letters., 24 (2011), 822-825.

[73] E. Karapinar, T. Abdeljawad and K. Tas, *A generalized contraction principle with control functions on partial metric spaces,* Comput and Mathematics with Applications., 3 (73) (2012), 716-719.

[74] M. A. Khamsi, *A nonstandart fixed point result in* $L^1([0,1]), Revista.colomb.Mate.VolXXVII., (1993), 137 - 146.$

[75] M. S. Khan, *A fixed point theorem for metric spaces,* Rend. Inst. Math. Univ. Trieste. Vol VIII, Fase., 10 (1976), 1-4.

[76] M. S. Khan, *Some fixed point theorems,* Indian. J. Pure. Appl. Math., 8 (1977), no. 12, 1511-1514.

[77] M. S. Khan, *A fixed point theorem for metric space,* Rend. Inst. Math. trieste., 8 (1976), 69-72.

[78] Kiran Q, Ali M U, Kamran T, *Generalization of Mizoguchi-Takahashi type contraction and related fixed point theorems,* J. Inequalities and Appl., (2014) 2014 :458.

[79] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly., 76 (1965), 1004-1007.

[80] W. A. Kirk, *On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces,* Glasgow. Math. Journal., 12 (1) (1971), 6-9.

[81] W. A. Kirk, P. S. Srinivasan and P. Veeramani *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive contraditions,* Fixed point theory., 4 (1) (2003), 79-89.

[82] M. A. Krasnoselskii, *On a theorem of M. Riesz,* Soviet. Math. Dokl., 1 (1960), 229-231.

[83] E. W. Larsen and P. F. Zweifel, *Spectrum of the linear transport operator,* J. Math. Phys., 15(11) (1974), 1987-1997.

[84] A. Latif, M. E. Gordji, E. Karapinar and W. Sintunavarat, *Fixed point results for generalized* (α, ψ)*-Meir-Keeler contractive mappings and appplications,* J. Ineq. Appl., (2014), 1 : 68.

[85] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal *Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations,* J. Differential. equutions., 221 (2006), 256-271.

[86] K. Latrach, *Compactness properties for perturbed semigroups and application to transport equations,* J. Austral. Math. Soc., (Series A) 69 (2000), 25-40.

[87] K. Latrach, *Compactness properties for linear transport operator with abstract boundary conditions,* J.Transport. Theory. Stat. Phys. Soc., 22 (1993), 39-65.

[88] K. Latrach, *Compactness results for transport equations and application,* Math. Mod. Meth. Appl. Sci., Vol 11, No.7 (2001), 1181-1202.

[89] K. Latrach, *Théorie spectrale d'équations cinétiques,* Thèse, Université de Franche-Comté Besancon, 1992.

[90] K. Latrach and A. Dehici, *Spectral properties and time asymptotic behaviour of linear transport equations in slab geometry,* Math. Meth. Appl. Sci., Vol 24, No.10 (2001), 689-711.

[91] J. Lehner and M. Wing, *On the spectrum of an unsymetric operator arising in the transport theory of neutrons,* Comm. Pure. Appl. Math, (8) (1955), 217-234.

[92] J. Lehner and M. Wing, *Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry,* Duke. Math. J., (23) (1956), 125-142.

[93] P. K. Lin, *Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings,* Pacific. J. Math. Vol 116., (1)(1985), .

[94] B. Lods, *A generation theorem for kinetic equations with non-contractive boundary conditions,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 655-660.

[95] B. Lods, *Théorie spectrale des équations cinétiques,* Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besancon, 2002.

[96] B. Lods, *Semigroup generation properties of streaming operators with non-contractive boundary conditions,* Mathematical and Computer Modelling., 42 (2005), 1141-1162.

[97] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration,* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (3)(1953), 506-510.

[98] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration,* Proc. Amer. Math. Soc., 4 (3)(1953), 506-510.

[99] J. T. Marti, *Mathematical foundations of kinetics in neutron transport theory,* Nucleonik., (8), Bd, Helft3 (1966), 159-163.

[100] J. Martin osborne et Ariel Rubinstein, *A course in game theory,* Cambridge. MA. MIT. (1994), 20.

[101] S. Massa, *Generalized contractions metric spaces,* Boll. Un. Math. Ital. 4(10) (1974), 689-694.

[102] Z. Mavar, *A fixed point theorem in a reflexive Banach space,* Publications de l'institur mathématique, Nouvele série, tome 33(47)(1983), 139-141.

[103] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mapping,* J. Math. Anal. Appl., (28)(1969), 326-329.

[104] J. Mika, *Time dependent neutron transport in plane geometry,* Nucleonik., (9), Bd, Helft4 (1967), 200-205.

[105] J. Mika, *The effects of delayed neutrons on the spectrum of the transport operator,* Nucleonik., (9), Bd, Helft1 (1967), 46-51.

[106] M. Mokhtar-Kharroubi, *Mathematical topics in neutron transport theory,* New-Aspects, Series on Adv. Math. Appl. Sci. (Vol 46 World Scientific), 1997.

[107] M. Mokhtar Kharroubi, *Propriétés spectrales de l'opérateur de transport dans les cas anisotrope,* Thèse 3^{eme} cycle, Université de Paris VI, 1982.

[108] M. Mokhtar Kharroubi, *Time asymptotic behavior and compactness in neutron transport theory,* Eur. J. Mech. B Fluids. (11) (1992), 39-68.

[109] M. Mokhtar Kharroubi, *Les équations de la neutronique,* Thèse de doctorat d'état, Université Paris 13, 1987.

[110] M. Mokhtar Kharroubi, *Effets régularisants en théorie neutronique,* C.R. Acad. Sci. Paris. Ser I., (309) (1990), 545-548.

[111] M. Mokhtar Kharroubi, *A unified treatment of the compactness in neutron transport theory with applications to spectral theory,* Publications mathématiques de Besançon, 1995-1996.

[112] M. Mokhtar Kharroubi, *Optimal spectral theory of the linear Boltzmann equation,* J. Func. Anal., (226) (1) (2005), 21-47.

[113] D. Milman, *On the criteria for the regularity of spaces of type (B),* C. R.(Doklady). Acad. Sci. URSS., 20 (1938), 243-246.

[114] J. F. Nash, Jr, *Equilibrium points in N-Person games,* PNAS. vol 36. n° ., (1)(1950), 48-59.

[115] M. O. Olatinwo, *Some stability results for nonexpansive and quasi-nonexpansive operators in uniformly convex Banach spaces using the Ishikawa iteration process,* Carpathian. J. Math., (24)(1)(2008), 82-87.

[116] M. O. Olatinwo, *Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Ishikawa and Kirk.Mann type,* J. Advan. Math. Studies., (1) (no. 1-2)(2008), 87-96.

[117] M. O. Olatinwo, *Convergence and stability results for some iterative schemes,* Acta. Univ. Apul., (26)(2011), 225-236.

[118] M. O. Osilike, *Stability of the Mann and Ishikawa iteration procedures for ϕ-strong pseudocontractions on nonlinear equation of the ϕ-strongly accretive type,* J. Math. Anal. Appl., (227)(1998), 319-334.

[119] M. Pacorar and I. A. Rus, *Fixed point theoryfor cyclic φ-contractions,* Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications A, vol. 72, no. 3-4, (2010), 1187-1187.

[120] R. S. Palais, *A simple proof of the Bannach contraction principal,* J. Fixed Point Theory Appl., 2 (2007), 221-223.

[121] A. Palczewski, *Spectral properties of the space inhomogeneous linearized Boltzmann operator,*Trans. Theor. Stat. Physic., (13) (1984), 409-430.

[122] E. Pap, O. Hadzic and R. Mesiar, *A fixed point theorem in probabilistic metric spaces and applications,* J. Math. Anal. Appl., vol.202, No. 2, (1996), 431-440.

[123] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer, New York, 1983.

[124] B. J. Pettis, *Aproof that every uniformly convexpace is reflexive,* Duke. Math.J. Vol 5., (1939), 249-253.

[125] V. Popa and M. Mocanu, *Altering distance and common fixed points under implicit relations,* Hacetepe. J. Math. Stat., 38 (3) (2009), 329-337.

[126] P. Raja and S. M. Vaezpour, *Some extension of Banach's principle in complete cone metric spaces,* J. Fixed. Point. Theory (Hindawi Publishing Corporation)., Vol 2008, Article ID 768294, 11 pages.

[127] B. K. Ray and S. P. Singh, *Fixed point theorems in Banach Spaces,* Indian. J. Pure. App. Math., 9 (3) (1978), 216-221.

[128] N. Redjel, *On some extensions of Banach's contraction principle and application to the convergence of some iterative processes,* Advances. Fixed. Point. Theory., 4 (4) (2014), 555-570.

[129] N. Redjel and A. Dehici, *On some fixed points of generalized contractions with rational expressions and applications,* Adv. Fixed. Point. Theory., (5) (2015), No 1, 56-70.

[130] S. Reich, *Kannan's fixed point theorem,* Boll. Un. Math. Ital., 4(1971), 1-11.

[131] B. E. Rhoades, *Proving fixed point theorems using general principles,* Indian. Jour. Pure. Appl. Math., 27 (8)(1996), 741-770.

[132] B. E. Rhoades, *A biased discution of fixed point theory,* Carpathian J. Math., 23 (4)(2007), 11-26.

[133] B. E. Rhoades and S. M. Soltuz, *On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods,* Inter. Jour. Math. Math. Sci., 7(2003), 451-459.

[134] B. E. Rhoades and S. M. Soltuz, *The equivalence of the Mann and Ishikawa iteration for non-Lipschitzian operators,* Inter. Jour. Math. Math. Sci., 42(2003), 2645-2651.

[135] B. E. Rhoades and S. M. Soltuz, *The equivalence between the convergence of Ishikawa and Mann iterations for asymptotically pseudocontractive map,* Jour. Math. Anal. Appl., 283(2003), 681-688.

[136] B. E. Rhoades and S. M. Soltuz, *The equivalence of Mann and Ishikawa iterations for a Lipschitzian psi-unifomly pseudocontractive and psi-unifomly accretive maps,* Tamkang. J. Math., 35(2004), 235-245.

[137] B. E. Rhoades and S. M. Soltuz, *The equivalence between the convergence of Ishikawa and Mann iterations for asymptotically nonexpansive in the intermediate sense and strongly successively pseudocontractive maps,* Jour. Math. Anal. Appl., 289(2004), 266-278.

[138] B. E. Rhoades, *A comparison of various definitions of contractive mappings,* Trans. Amer. Math. Soc., 226(1977), 257-290.

[139] A. Rodkina, *Solubility of stochastic differential equations with perturbed argument,* Ukrainian. Math. Journal., 37 (1) (1985), 98-103.

[140] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, *Mathematics and Technology,* SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008.

[141] D. A. Ruiz, *Convergence and stability of some iterative processes for a class of quasi-nonexpansive type mappings,* J. Nonlinear. Sci. Appl., 5(2012), 93-103.

[142] I. Rus, *Some fixed point theorems in metric spaces,* Math. Rev., Trieste.

[143] B. Samet, C. Vetro and H. Yazidi, *A fixed point theorem for a Meir-Keeler type contraction through rational expression,* J. Nonlinear. Sci. Appl., 6 (2013), 162-169.

[144] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, *Fixed point theorem for $\alpha - \psi$-contractive type mappings,* J. Nonlinear. Anal., 75 (2012), 2154-2165.

[145] M. Sbihi, *Analyse spectrale de modèles neutroniques,* Thèse de doctorat, Franche-comté, 2005.

[146] V. Sehgal, *On fixed and periodic points for a class of mappings,* I. Lond. Math. Soc., 5(1972), 571-576.

[147] V. M. Sehgal and A. T. Bharucha-Reid, *Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces,* Theory. Comput. Systems., vol.6, No. 1, (1972), 97-102.

[148] M. D. Sen and E. Karapinar, *Some results on best proximity points of cyclic contractions in probabilistic metric spaces,* J. Function. Spaces., (2015), ID 470574, 11 pages.

[149] S. M. Soltuz, *The equivalence of Picard, Mann and Ishikawa iterations when dealing with quasi-contractive operators,* Math. Comm., 10 (2005), 81-89.

[150] D. Song, *On the spectrum of neutron transport equation with reflecting boundary conditions,* Phd thesis, Virginia polytechnic institut and State university, 2000.

[151] T. Suzuki, *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness,* Proc. Amer. Math. Soc., Vol 136, N 5 (2008), 1861-1869.

[152] W. Takahashi, *A convexity in metric space and nonexpansive mapping I,* Kodai Math. Semp. Rep., 22(1970), 142-149.

[153] R. Taskovic, *A generalization of Banach's contraction principle,* Public. Instit. Math. Nouvelle serie., Tome 23(37)(1978), 179-191.

[154] F. Tricomi, *Una teorema sulla convergenza delle successioni formate delle successive iterate di una funzione di una variabile reale,* Giorn. Math. Bataglini., (54)(1916), 1-9.

[155] A. Y. Veretennikov, *On strong solutions of stochastic differential equations,* Teor. Veroyatn. Primen., 24, No. 2, (1979), 348-360.

[156] I. Vidav, *Existence and uniqueness of non-negative eigenfunction of the Boltzmann operator,* J. Math. Anal. Appl., 22 (1968), 144-155.

[157] I. Vidav, *Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory,* J. Math. Anal. Appl., 30 (1970), 264-279.

[158] J. Voigt, *Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisioness gases,* München, Habilitationsschrift, 1981.

[159] J. Voigt, *On the perturbation theory for strongly continuous semigroups,* Math. Ann., 229 (1977), 163-171.

[160] J. Voigt, *Spectral properties of the neutron transport equation,* J. Math. Anal. Appl., 106 (1985), 140-153.

[161] L. Weis, *A generalization of the Vidav-Jorgens perturbation theorem for semigroups and its application to transport theory,* J. Math. Anal. Appl., 129 (1988), 6-23.

[162] T. Zamfirescu, *Fixed point theorems in metric spaces,* Arch. Math., (23)(1972), 292-298.

[163] X. Zhang, *Spectral interpolation of the linear Boltzmann operator in L_p spaces,* J. Trans. Theor. Stat. Phys., (32) (1) (2003) 63-71.

Résumé

Cette thèse s'articule autour de résultats d'existence et d'unicité de points fixes à la fois dans le cadre métrique et normé ainsi que leurs applications. Les résultats sont illustrés par beaucoup d'exemples et pour sortir du cadre théorique et concrétiser cette thématique dans le contexte de phénomènes relevant des sciences appliquées, on étudie la résolution d'une équation différentielle stochastique où l'inconnue représente un processus stochastique et celle d'une équation de transport nonlinéaire où l'inconnue représente la densité de probabilités des particules.

Mots clés : Contraction de Banach, point fixe, existence, unicité, expression rationnelle, application non expansive, application quasi-non expansive, espace métrique convexe, espace strictement convexe, espace uniformément convexe, structure normale, processus itératif, convergence, stabilité, mesure de non compacité, mesure de non compacité faible, équation différentielle stochastique, équation de transport.

Abstract

This thesis is devoted to some results of existence and uniqueness of fixed points at the same time in the metric and normed framework with their applications. These results are illustrated by many examples and to exit the theoretical contributions and use this thematic in the the case of the phenomena of applied sciences, we study the resolution of stochastic differential equation where the unknown is a stochastic process and that of nonlinear transport equation where the unknown represents a density of particles.

Key words : Banach contraction, fixed point, existence, uniqueness, rational expression, non expansive mapping, quasi-non expansive mapping, convex metric space, strictly convex space, uniformly convex space, normal structure, iterative process , convergence, stability, measure of non compactness, measure of weak non compactness, stochastic differential equation, transport equation.

ملخص

موضوع هده الأ طرو حة يتمحور حول بعض النتا ئج التى تتعلق بوجود ووحدانية النقاط الصامدة فى الفضاءات المترية و النظيمية و تطبيقاتها. هاته النتائج وضحت أكثر بالكثير من الأمثلة و للخروج من الإطار النظرى و تجسيد هدا الموضوع فى سياق العلوم التطبيقية, ندرس حل معادلة تفاضلية عشوائية أين المتغير فى هده الحالة يمثل عائلة من المتغيرات العشوائية و كدلك حل معادلة إنتقال نترونية غير خطية أين المتغير يمثل كثافة جزيئات.

الكلمات المفتاحية: تقليص بناخ, نقطة صامدة, وجود, وحدانية, عبارة كسرية, تطبيق غير تمديدى, تطبيق شبه تمديدي, فضاء متري محدب, فضاء محدب بإنتظام, بنية طبيعية, عملية تكرارية, تقارب, إستقرار, قياس اللاتراص, قياس اللاتراص ضعيف, معادلة تفاضلية عشوائية, معادلة إنتقال.