RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

No d'ordre : ....

No série : ....

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Décomposition des opérateurs de Riesz et propriétés spectrales de certaines classes de perturbations dans les espaces de Banach riches et exotiques

Option

Analyse Fonctionnelle

Par :

DEBBAR RABAH

Devant le jury :

Président :	M. DENECHE	Prof	Univ. Constantine 1
Rapporteur :	A. DEHICI	Prof	Univ. Souk-Ahras
Examinateurs :	K. LATRACH	Prof	Univ. Clermont-Ferrand II
	L. MEZRAG	Prof	Univ. Msila
	A. L. MARHOUNE	Prof	Univ. Constantine 1
	A. MANSOUR	MC. A	C. Univ. El Oued

Soutenue le 28 - 04 - 2013

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadreur Monsieur Dehici Abdelkader professeur à l'université de Souk-Ahras qui a suivi avec intérêt le déroulement et l'enchaînement de mes travaux. Je suis reconnaissant de sa patience et ses conseils précieux.

Mes sincères remerciements à Monsieur Mohamed Deneche professeur à l'université de Constantine 1 d'avoir accepter de présider le jury, je tiens à lui exprimer mon extrême gratitude.

Je remercie également Monsieur Khalid Latrach professeur à l'université Clermont-Ferrand II pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'être membre du jury de cette thèse malgrè leur diverses obligations.

Mes remerciements vont à Monsieur Lahcène Mezrag professeur à l'université de Msila, Ahmed-Lakhdar Marhoune professeur à l'université de Constantine 1 et Monsieur Abdel Ouahab Mansour maître de conférences au centre universitaire d'El Oued qui ont accepté d'expertiser ce travail et de faire partie du jury de soutenance.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à élaborer ce travail dans les meilleures conditions.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette thèse est de donner une analyse détaillée des propriétés spectrales de certaines classes d'opérateurs sur divers types d'espaces de Banach. Bien que difficiles et extrêmement compliquées, les questions qui lui sont associées sont toujours d'actualité à l'exemple de la décomposition de West des opérateurs de Riesz et la classification des espaces de Banach. Ici, la caractérisation des opérateurs polynomiallement de Riesz est bien établie sur une famille d'espaces dits de Smyth, en outre, on donne une comparaison entre les applications spectre et spectre essentiel de Wolf des opérateurs définis sur les espaces de Banach ayant des géomètries riches et pauvres (exotiques).

Mots clés : Espace de Banach de Smyth, spectre, spectre essentiel de Wolf, décomposition de West, opérateur de Riesz.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to give a detailed analysis of the spectral properties of certain classes of operators defined on various types of Banach spaces. Although difficult and extremely complicated, the questions that are related are always topical, as the example of West decomposition of Riesz operators and the classification of Banach spaces. Here, the characterization of polynomially Riesz operators was established on a family of spaces called Smyth Banach spaces, moreover, we give a study of comparison between the maps spectra and Wolf essential spectra of operators defined on a Banach spaces having rich and poor geometries.

Key words : Smyth Banach space, spectra, Wolf essential spectra, West decomposition, Riesz operator.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو إعطاء تحليل مدقق للخصائص الطيفية للمؤثرات الخطية المعرفة على بعض أصناف فضاءات بناخ .

بالرغم من صعوبة و تعقيد الأسئلة المتعلقة بهذا الموضوع إلا أنها دائما محل اهتمام ومتابعة الاختصاصيين في هذا الميدان، كمثال على ذلك تجزئة West لمؤثرات Riesz وتصنيف فضاءات بناخ.

هنا، نستخلص عبارة كثيرات حدودية Riesz المعرفة على فضاءات Smyth ، زيادة على ذلك، نعطي مقارنة بين التطبيقين الطيف و الطيف الأساسي ل Wolf للمؤثرات الخطية المعرفة على فضاءات بناخ التي تملك هندسات غنية وفقيرة.

الكلمات المفتاحية : فضاء بناخ Smyth، الطيف، الطيف الأساسي ل Wolf، تجزئة West ، مؤثر Riesz .

Table des matières

Introduction

Il n'est secret pour personne que la théorie des opérateurs a joué un rôle fondamental dans le développement des mathématiques à la fois pures et appliquées, mais elle est liée étroitement aux cadres fonctionnels sur lesquels elle est définie, représentés en général par les structures des espaces de Banach.

En sortant du cadre topologique simple dans lesquels ils sont utilisés, les espaces de Banach et leur classification (à isomorphisme près) s'avère un sujet très compliqué et hors de porté. Les premières questions qui ont attiré l'attention des spécialistes consistent à savoir s'il y'a des espaces indécomposables ou non, cette question n'est pas le fruit du hasard car en général les espaces de Banach auxquels on est habitué sont des espaces réticulés (espaces de fonctions, suites,...) dont la structure est bien comprise. Les travaux dans cette direction ont débuté avec les résultats pertinents datant de 1991 et établis par T. Gowers et B. Maurey résolvant le problème de la base inconditionnelle. En effet, ils ont construit un espace de Banach sans suite basique inconditionnelle dont la norme apparaît comme un point fixe d'une certaine fonctionnelle, malgré qu'il est réflexif (et donc séparable), cet espace jouit d'une propriété très étrange, il est H.I (héréditairement indécomposable), en d'autres termes, ni lui, ni aucun de ses sous-espaces fermés ne peut s'écrire comme somme directe de deux sous-espaces fermés de dimensions infinies et de plus, il n'est isomorphe à aucun de ses sous-espaces propres, ceci répond par la négation à une question donnée par S. Banach et restée longtemps ouverte, en outre chaque opérateur borné sur cet espace s'écrit sous la forme scalaire I_d + opérateur strictement singulier (dans les deux cas réel et complexe).

Signalons que les résultats qui se sont suivis étaient aussi d'une grande ampleur, citons par exemple, le théorème de dichotomie de T. Gowers [24] affirmant que chaque espace de Banach, ou bien il admet un sous-espace ayant une base inconditionnelle ou bien un sous-espace

$H.I$, c'est à dire que chaque espace de Banach ou bien il contient un très bon sous-espace ou bien un très mauvais sous-espace, rajoutons aussi le joli résultat de R. Komovoski, N. Tomczak-Jaegermann [32] sur le fait qu'un espace de Banach qui est isomorphe à chacun de ses sous-espaces fermés est isomorphe à un espace de Hilbert. Ces découvertes ont permis de changer complètement l'idée des mathématiciens sur toute la théorie.

Le type d'espaces étranges porte en général le nom d'espaces exotiques, malgré que cette dernière notion reste vague et relative.

Le but de cette thèse est d'étudier et de faire le tour sur pas mal de problèmes relevant à la fois de la théorie des opérateurs et des perturbations en exploitant les deux directions de la géométrie des espaces de Banach.

L'organisation de la thèse est réalisée comme suit :

CHAPITRE 1

Dans le chapitre 1, on rappelle quelques résultats fondamentaux et notions portant sur la théorie de Fredholm et les perturbations qui leur sont associées, sur quelques éléments de la théorie spectrale et celle des blocks et des bases dans les espaces de Banach.

CHAPITRE 2

Dans ce chapitre, on étudie à la fois la structure des opérateurs polynomiallement de Riesz sur divers type d'espaces dits de Smyth, l'idée s'est inspirée d'une conjecture dûe à M. R. F. Smyth [52] dans le cadre des algèbres de Banach et appliquée dans le contexte $\mathcal{L}(X)$, la structure de ce type d'opérateurs est bien établie. Ensuite, des remarques générales vont être abordées, en ce qui concerne le peu d'exemples qui existe dans la littérature sur le cas des opérateurs strictement singuliers non-compacts et leur lien avec la décomposition de West des opérateurs de Riesz, cette dernière qui va faire l'objet d'une investigation dans un cadre Banachique moyennant des conditions suffisantes sur la série des modules de valeurs propres.

CHAPITRE 3

Dans ce chapitre, on va adopter la notion d'espaces exotiques pour ceux sur lesquels les opérateurs linéaires bornés possèdent des spectres essentiels de Wolf d'intérieurs vides, elle inclut d'une façon naturelle tous les espaces H.I, Q.H.I (à quotients héréditairement indécomposables) et bien d'autres. Plusieurs comparaisons entre ce type d'espaces et ceux dits riches (représentés par les espaces de Hilbert) vont être établies comme le problème de la frontière des opérateurs de Fredholm dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ et la surjection ou non des applications spectre et spectre essentiel de Wolf à la fois.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats classiques fondamentaux sur la théorie de Fredholm, la théorie spectrale et la géométrie des espaces de Banach qui seront utiles dans la suite des autres chapitres.

1.1 Théorie de Fredholm et perturbations

Soient X et Y deux espaces de Banach complexes de dimensions infinies et soit $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires fermés à domaines denses de X dans Y. On note par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans Y tandis que $\mathcal{K}(X,Y)$ désigne le sous-espace des opérateurs compacts de X dans Y. Si $A \in \mathcal{C}(X,Y)$, on écrit $N(A) \subset X$ et $R(A) \subset Y$ pour le noyau et l'image de l'opérateur A. On pose $\alpha(A) = \dim N(A)$, $\beta(A) = \operatorname{codim} R(A)$. Soit $A \in \mathcal{C}(X,Y)$ ayant une image fermée. Alors, on dit que A est un opérateur $\Phi_+ (A \in \Phi_+(X,Y))$ si $\alpha(A) < \infty$ et A est dit un opérateur $\Phi_- (A \in \Phi_-(X,Y))$ si $\beta(A) < \infty$, $\Phi(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cap \Phi_-(X,Y)$ est la classe des opérateurs de Fredholm tandis que celle des opérateurs semi-Fredholm est désignée par $\Phi_\pm(X,Y) = \Phi_+(X,Y) \cup \Phi_-(X,Y)$. Pour $A \in \Phi(X,Y)$, l'indice de A est l'entier donné par $i(A) = \alpha(A) - \beta(A)$. Si $X = Y$, alors les ensembles $\mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{K}(X,Y)$, $\mathcal{C}(X,Y)$, $\Phi_+(X,Y)$, $\Phi_\pm(X,Y)$ et $\Phi(X,Y)$ sont remplacés respectivement par $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\Phi_+(X)$, $\Phi_\pm(X)$ et $\Phi(X)$. Soit $A \in \mathcal{C}(X)$. Le spectre de A est noté par $\sigma(A)$. L'ensemble résolvant de A, $\rho(A)$ est le complémentaire de $\sigma(A)$ dans le plan complexe. Un nombre complexe λ est dans φ_{+A}, φ_{-A}, $\varphi_{\pm A}$ ou φ_A si $\lambda - A$ est dans $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$, $\Phi_\pm(X)$ ou $\Phi(X)$ respectivement. Dans la suite,

$\Phi_0(X)$ va désigner la classe des opérateurs de Fredholm d'indices nuls. Rappelons quelques propriétés de ces classes et pour plus de détails, on pourra se reférer à [19, 21, 30, 33, 40, 47].

Proposition 1.1.1. *(i) Les ensembles φ_{+A}, φ_{-A} et φ_A sont ouverts du plan $\mathbb{C}$.*
(ii) $i(\lambda - A)$ est constant sur chaque composante connexe de φ_A.
(iii) $\alpha(\lambda - A)$ et $\beta(\lambda - A)$ sont constants sur chaque composante connexe de φ_A sauf sur un ensemble de points discrets à valeurs suffisamment larges.

Définition 1.1.1. Soient X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ est dit strictement singulier si la restriction de S à chaque sous-espace fermé de dimension infinie de X n'est pas un isomorphisme. On désigne par $\mathcal{S}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs strictement singuliers de X dans Y.

Pour une étude bien détaillée sur les propriétés des opérateurs strictement singuliers, on peut se referer à [35, 38, 43]. Notons que $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X,X)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$. En géneral, les opérateurs strictement singuliers ne sont pas nécessairement compacts et la strict singularité n'est pas conservée en général par dualité.

Soit X un espace de Banach. Si N est un sous-espace fermé de X, on note par π_N l'application quotient $X \to X/N$. La codimension de N, $codim(N)$ est définie comme étant la dimension du sous-espace vectoriel X/N.

Définition 1.1.2. Soit X et Y deux espaces de Banach et $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, S est dit strictement cosingulier s'il n'existe pas de sous-espaces fermés N de Y $(codim(N) = \infty)$ tel que $\pi_N S$: $X \to Y/N$ soit surjective. On désigne par $\mathcal{CS}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs strictement cosinguliers de X dans Y.

Cette classe a été introduite par A. Pelczynski [43] et si $X = Y$, $\mathcal{CS}(X) = \mathcal{CS}(X,X)$ forme un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$.

Définition 1.1.3. Soit $F \in \mathcal{L}(X,Y)$. F est dit perturbation de Fredholm si $U+F \in \Phi(X,Y)$ pour tout $U \in \Phi(X,Y)$. F est dit perturbation semi-Fredholm supérieure (resp. inférieure) si $U + F \in \Phi_+(X,Y)$ (resp. $\Phi_-(X,Y)$) pour tout $U \in \Phi_+(X,Y)$ (resp. $\Phi_-(X,Y)$).

Remarque 1.1.1. Soient $\Phi^b(X,Y)$, $\Phi^b_+(X,Y)$, $\Phi^b_-(X,Y)$ les ensembles $\Phi(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$, $\Phi_+(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$ et $\Phi_-(X,Y) \cap \mathcal{L}(X,Y)$, respectivement. Si dans la Définition 1.1.3, on remplace $\Phi(X,Y)$, $\Phi_+(X,Y)$ et $\Phi_-(X,Y)$ par $\Phi^b(X,Y)$, $\Phi^b_+(X,Y)$ et $\Phi^b_-(X,Y)$, on obtient les ensembles $\mathcal{F}^b(X,Y)$, $\mathcal{F}^b_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}^b_-(X,Y)$. Ces classes d'opérateurs ont été introduites et étudiées par [21]. En particulier, il a été démontré que $\mathcal{F}^b(X,Y)$, $\mathcal{F}^b_+(X,Y)$, $\mathcal{F}^b_-(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$ et $\mathcal{F}_-(X,Y)$ sont fermées, de plus si $X=Y$, alors $\mathcal{F}^b(X)$, $\mathcal{F}^b_+(X)$, et $\mathcal{F}^b_-(X)$ sont des idéaux fermés de $\mathcal{L}(X)$.

En général, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(X,Y) &\subseteq \mathcal{S}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X,Y), \\
\mathcal{K}(X,Y) &\subseteq \mathcal{CS}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}^b(X,Y).
\end{aligned}
$$

L'inclusion $\mathcal{S}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X,Y)$ est dû à Kato [30] tandis que l'inclusion $\mathcal{CS}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X,Y)$ a été démontrée par Vladimirskii [54].

Un opérateur $R \in \mathcal{L}(X)$ est dit de Riesz si $\varphi_R = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour plus d'informations sur cette classe d'opérateurs, $\mathcal{R}(X)$, on peut voir par exemple [8] et les références qui lui sont associées. Rapplons que la classe des opérateurs de Riesz satisfait la théorie de Riesz-Schauder des opérateurs compacts et $\mathcal{R}(X)$ n'est pas en général un idéal de $\mathcal{L}(X)$.

Dans [47], l'auteur a prouvé que $\mathcal{F}^b(X)$ est le plus grand idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(X)$ contenu dans $\mathcal{R}(X)$. Donc les inclusions mentionnées précédemment impliquent que $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{S}(X)$, $\mathcal{CS}(X)$, $\mathcal{F}^b_-(X)$, $\mathcal{F}^b_+(X)$ sont contenus dans $\mathcal{R}(X)$.

Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $A \in \mathcal{C}(X,Y)$. Pour tout $x \in D(A)$ (le domaine de A), on écrit

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\| \ \text{(norme de graphe)}$$

On observe que $D(A)$ muni de la norme du graphe $\|.\|_A$ est un espace de Banach noté par X_A et A regardé comme un opérateur de X_A dans Y est borné et désigné par $\widehat{A}$. Si $D(A) \subseteq D(J)$, alors J est A-défini. De plus, on a

$$\alpha(\widehat{A}) = \alpha(A),\ \beta(\widehat{A}) = \beta(A),\ R(\widehat{A}) = R(A),\ \alpha(\widehat{A} + \widehat{J}) = \alpha(A + J),$$

$$\beta(\widehat{A} + \widehat{J}) = \beta(A + J),\ R(\widehat{A} + \widehat{J}) = R(A + J).$$

Il est clair que les relations mentionnées précédemment impliquent que

$$\begin{aligned} A &\in \Phi_+(X,Y) \iff \widehat{A} \in \Phi_+^b(X_A, Y)\,; \\ A &\in \Phi_-(X,Y) \iff \widehat{A} \in \Phi_-^b(X_A, Y)\,; \\ A &\in \Phi(X,Y) \iff \widehat{A} \in \Phi^b(X_A, Y)\,. \end{aligned}$$

Définition 1.1.4. On dit que deux espaces de Banach X et Y sont totalement incomparables si $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{S}(X,Y)$.

***Exemple* 1.1.1.** *Chaque deux espaces différents des* $l_p \cup c_0$ $(1 \le p < \infty)$ *sont totalement incomparables (voir [21, 22, 35]).*

Définition 1.1.5. On dit que deux espaces de Banach X et Y sont essentiellement incomparables si $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{F}^b(X,Y)$.

***Exemple* 1.1.2.** *Les espaces suivants sont essentiellement incomparables :*

1) X *réflexif,* Y *ayant la propriété de Dunford-Pettis ;*

2) X *ne contient aucune copie de* l_∞, $Y = l_\infty$, H^∞ *ou* $C(K)$, K σ*-Stonien ;*

3) X *ne contient aucune copie de* c_0, $Y = C(K)$ *;*

4) X *ne contient aucune copie de* c_0, $Y = C([0,1])$ *;*

5) X *ne contient aucune copie de* l_1, $Y = L_1(\mu)$ *;*

6) X, Y *sont des espaces différents de* $\{l_p,\ (1 \le p < \infty),\ c_0\}$.

Remarque 1.1.2. Rappelons que la définition des espaces de Banach essentiellement incomparables est symmétrique, en d'autres termes, $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{F}^b(X,Y)$ si et seulement si $\mathcal{L}(Y,X) = \mathcal{F}^b(Y,X)$ [22]. Aussi, on peut facilement observer que deux espaces de Banach totalement incomparables sont nécessairement essentiellement incomparables mais l'inverse n'est en général pas vrai, il suffit de prendre un espace héridiitairement indécomposable Y (voir chapitres 2 et 3) et posons $X = Y \times Y$, on vérifie facilement que $\Phi^b(Y \times Y, Y) = \emptyset$, de plus, la projection $\mathcal{P}_r : Y \times Y \to Y$ donnée par $\mathcal{P}_r(x, y) = x$ est borné de $Y \times Y$ dans Y, malheureusement, il n'est pas strictement singulier.

Théorème 1.1.1. *[49] Soit $A \in \mathcal{C}(X, Y)$. Alors $A \in \Phi(X, Y)$ si et seulement s'il existe un opérateur $A_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$ et des opérateurs $K_1 \in \mathcal{K}(X), K_2 \in \mathcal{K}(Y)$ tels que*

$$\begin{aligned} A_0 A &= I - K_1 \text{ sur } D(A) \\ A A_0 &= I - K_2 \text{ sur } Y \end{aligned}$$

De plus, on peut toujours choisir K_1, K_2 de rangs finis.

Enonçons à présent le théorème d'Atkinson.

Théorème 1.1.2. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach. Si $A \in \Phi(X, Y)$ et $B \in \Phi(Y, Z)$, alors $BA \in \Phi(X, Z)$ et $i(BA) = i(B) + i(A)$.*

Le théorème suivant est une extension générale moyennant les perturbations de Fredholm du théorème classique de Riesz.

Théorème 1.1.3. *[33] Soient $A \in \Phi(X, Y)$, $F \in \mathcal{F}(X, Y)$, alors, on a $A + F \in \Phi(X, Y)$ et $i(A + F) = i(A)$.*

Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux en théorie de Fredholm.

Théorème 1.1.4. *[49] Soient X, Y et Z des espaces de Banach et $A \in \Phi(X, Y)$. Si $B \in \mathcal{C}(Y, Z)$ et $BA \in \Phi(X, Z)$, alors $B \in \Phi(Y, Z)$.*

Théorème 1.1.5. *[49] Soient X, Y et Z des espaces de Banach et $A \in \mathcal{C}(X, Y)$. On suppose que $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ et $\alpha(B) < \infty$ avec $BA \in \Phi(X, Z)$. Alors, $A \in \Phi(X, Y)$.*

1.2 Spectre et spectre essentiel

Cette section est consacrée à quelques éléments de la théorie spectrale.

1.2.1 Spectre

Soit A un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Banach X, l'ensemble résolvant de A est l'ouvert du plan complexe défini par

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda - A \text{ est bijectif et } (\lambda - A)^{-1} : X \to X \text{ est continue}\right\}.$$

Pour $\lambda \in \rho(A)$, on note $R(\lambda, A)$ la résolvante de A au point λ et $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$.

Définition 1.2.1. (décomposition du spectre d'un opérateur linéaire borné) Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$, on appelle spectre ponctuel de T l'ensemble $\sigma_p(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I_d - T$ ne soit pas injectif (c'est l'ensemble des valeurs propres de T). On appelle spectre résiduel de T l'ensemble $\sigma_r(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I_d - T$ soit injectif, mais son image ne soit pas dense. On appelle spectre continu de T l'ensemble $\sigma_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I_d - T$ soit injectif, à image dense mais pas fermée.

Il est facile de voir que $\lambda \in \sigma_c(T)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma(T)$ et $\lambda I_d - T$ est injectif à image dense, de plus $\sigma(T) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(T)$ (union disjointe) et $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ où T^* est l'opérateur transposé de T.

Proposition 1.2.1. *Soient X un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$; on a $\sigma_c(T) = \sigma_p(T^*) \backslash \sigma_p(T)$ et $\sigma_c(T^*) \subset \sigma_c(T)$.*

Si X est réflexif, on a l'égalité $\sigma_c(T^*) = \sigma_c(T)$.

Quelques exemples classiques

***Exemple* 1.2.1.** *Soit K un compact non vide du plan complexe et soit $X = \mathcal{C}(K)$ l'espace des applications continues sur K à valeurs complexes, c'est un espace de Banach complexe, on prend l'opérateur $T_f \in \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ défini par $g \to fg$, il est facile de voir $T_f \in \mathcal{L}(C(K))$. De plus, on a $\sigma(T_f) = \{f(s); s \in K\} = \sigma_p(T_f) \cup \sigma_r(T_f) \cup \sigma_c(T_f)$ où $\sigma_c(T_f) = \emptyset$, $\sigma_p(T_f) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} / \ \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(\{\lambda\})}} \neq \emptyset\right\}$.*

Exemple 1.2.2. *Prenons l'exemple de l'espace de Hilbert* $H = L_2([0,1])$ *et soit* $V : H \to H$ *défini par* $V(f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ *pour* $f \in H$ *et* $s \in [0,1]$.

Il est facile de montrer que le rayon spectral de V *noté par* $r_\sigma(V)$ *est nul* $(r_\sigma(V) = 0)$, *ce qui implique que* $\sigma(V) = \{0\}$, *de plus, on a* $\sigma_p(V) = \sigma_r(V) = \emptyset$ *et* $\sigma_c(V) = \sigma(V) = \{0\}$, V^{-1} *ici est un opérateur linéaire fermé à domaine dense avec* $\sigma(V^{-1}) = \emptyset$.

Exemple 1.2.3. ***Les opérateurs Schift à droite et à gauche sur les espaces*** l_p $(1 \leq p < \infty)$

Soit $S \in \mathcal{L}(l_p)$ *qui à une suite* $(x_n)_{n\geq 0}$ *associe la suite* $(y_n)_{n\geq 0}$ *définie par* $y_0 = 0$ *et* $y_n = x_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$, *cet opérateur s'appelle l'opérateur de décalage (à droite), ou opérateur de Schift à droite, c'est une isométrie, c'est à dire* $\sigma(S) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq 1\}$.

Si $y \in l_q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *et si* $x \in l_p$, *on note l'action de dualité* l_p *sur* l_q *par* $\langle y, x\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n x_n$.

Soit $T : l_q \to l_q$ *l'opérateur de décalage à gauche, défini par* $\left(T(y_n)_{n\geq 0}\right) = (y_{n+1})_{n\geq 0}$.

Alors on peut montrer que : $\sigma(S) = \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ *avec* $\sigma_p(S) = \emptyset$, $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| = 1\}$ *et* $\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| < 1\}$.

1.2.2 Spectre essentiel

Il est bien connu que si A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors son spectre essentiel est l'ensemble des points limites de son spectre, c'est à dire tous les points du spectre excepté les valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies (voir [28]). Lorsque A est fermé à domaine dense sur un espace de Banach X, il y'a plusieurs définitions du spectre essentiel qui coïncident toutes pour un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert.

Concentrons nous sur ceux de Wolf et de Schechter.

Définition 1.2.2. Soit X un espace de Banach et soit $A \in C(X)$, alors le spectre de Wolf de A et le spectre Weyl (Schechter) de A sont donnés respectivement par :

$$\sigma_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \lambda I - A \notin \Phi(X)\} = \mathbb{C} \backslash \varphi_A.$$

$$\sigma_{\omega}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A+K).$$

Le résultat suivant, dû à M. Schechter, établit l'équivalence entre la définition du spectre de Weyl et le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *[49] Soit X un espace de Banach et soit $A \in C(X)$, alors $\lambda \notin \sigma_{\omega}(A)$ si et seulement si $\lambda \in \varphi_A^0$ où $\varphi_A^0 = \{\lambda \in \varphi_A$ tel que $i(\lambda I - A) = 0\}$.*

Dans [33], les auteurs ont raffiné la définition de $\sigma_{\omega}(A)$ moyennant la classe des perturbations de Fredholm, plus précisément, ils ont montré que $\sigma_{\omega}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}^b(X)} \sigma(A+F)$ où $\mathcal{F}^b(X)$ est l'idéal des perturbations de Fredholm sur X.

Remarque 1.2.1. Il est facile d'observer que $\sigma_e(A) \subseteq \sigma_{\omega}(A)$ et $\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \subseteq \sigma_{\omega}(A)$.

Remarque 1.2.2. On signale que si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors $\sigma_e(A)$ et $\sigma_{\omega}(A)$ sont des ensembles compacts du plan $\mathbb{C}$ (car ce sont deux fermés inclus dans le compact non vide $\sigma(A)$).

Proposition 1.2.2. *Soit X un espace de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(X)$, désignons par $\sigma_+(A)$ et $\sigma_-(A)$ les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} \sigma_+(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \lambda I - A \notin \Phi_+^b(X)\right\}; \\ \sigma_-(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; \lambda I - A \notin \Phi_-^b(X)\right\}. \end{aligned}$$

Alors les ensembles $\sigma_+(A)$ et $\sigma_-(A)$ sont des compacts du plan $\mathbb{C}$ et on a $\sigma_+(A) \cup \sigma_-(A) \subseteq \sigma_e(A)$ et $\partial\sigma_e(A) \subseteq \sigma_+(A) \cap \sigma_-(A)$ où ∂ désigne le symbole de la frontière.

1.3 Bases et suites de Blocks dans les espaces de Banach

1.3.1 Bases de Schauder

Définition 1.3.1. une suite $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dans un espace de Banach X est dite une base de Schauder de X si pour tout $x \in X$, il existe une unique suite de scalaires $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ telle que

$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$, une suite $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ qui est une base de Schauder du sous-espace fermé qu'elle engendre est dite une suite basique.

Remarque 1.3.1. Il est évident qu'un espace de Banach possédant une base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ peut être considéré comme un espace de suites en identifiant chaque $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ avec l'unique suite de coefficients $(a_1, a_2, ...)$. De plus, si $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach ayant une base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Alors pour tout $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ dans X, l'expression $|||x||| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$ est finie. Evidemment, $|||.|||$ est une norme sur X et $\|x\| \leq |||x|||$ pour tout $x \in X$. Mieux que ça ces deux normes sont équivalentes.

Notons $P_n : X \to X$ les projections définies, par $P_n \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, Ce sont des opérateurs linéaires bornés sur X et $\sup_n \|P_n\| < \infty$. Ces applications sont appellées les projections associées à $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ et le nombre $\sup_n \|P_n\|$ est dit la constante basique de $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Une base de Schauder ayant une constante basique 1 est dite une base monotone. En d'autres termes, une base est monotone si, pour tout choix de scalaires $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, la suite des nombres $\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \right\}_{n=1}^{+\infty}$ est croissante et chaque base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est monotone par rapport à la norme $|||x||| = \sup_n \|P_n x\|$ car

$$|||P_n x||| = \sup_m \|P_m P_n x\| = \sup_{1 \leq m \leq n} \|P_m x\| \leq |||x|||.$$

C'est à dire que pour toute base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ dans X, on peut toujours passer à une norme équivalente pour laquelle la base donnée est monotone.

Voici un simple critère vérifiant le fait qu'une suite $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une base de Schauder ou non.

Proposition 1.3.1. *Soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de vecteurs dans X. Alors $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une base de Schauder de X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $x_n \neq 0 \ \forall n$.

(ii) $\exists K > 0$ *tel que pour tout choix de scalaires* $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *et entiers* $n < m$, *on a*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

(iii) *Le sous-espace fermé engendré par* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *coïncide avec tout X.*

Il est facile de voir que les assertions (i) et (ii) de la proposition précédente donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour une suite $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, pour qu'elle soit une suite basique.

Une base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est dite normalisée si $\|x_n\| = 1$ pour tout n. Il est facile de voir que si $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une base de Schauder de X, alors la suite $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}_{n=1}^{+\infty}$ est une base normalisée.

Exemple 1.3.1. *La suite des vecteurs* $e_n = (0, 0, ..., 0, 1^n, 0, ...)$ *forme une base monotone et normalisée des espaces* l_p *et* c_0.

Exemple 1.3.2. *Un important exemple d'une base de Schauder est le système de Haar dans les espace* $L_p[0,1]$ *pour tout* $(1 \leq p < \infty)$.

Définition 1.3.2. La suite de fonctions $\{\varkappa_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ définie par $\varkappa_1(t) \equiv 1$ et pour k=0, 1, 2,..., l=1, 2,..., 2^k.

$$\varkappa_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[(2l-2)\,2^{-k-1}, (2l-1)\,2^{-k-1}\right] \\ -1 \text{ si } t \in \left[(2l-1)\,2^{-k-1}, 2l.2^{-k-1}\right] \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

est appelé le système de Haar.

Le système de Haar (donné par cet ordre) est une base monotone des espaces $L_p[0,1]$ pour tout $1 \leq p < \infty$ non normalisée. En intégrant le système de Haar ou plus précisément, en posant.

$$\varphi_1(t) \equiv \mathbf{1};\ \varphi_n(t) = \int_0^t \varkappa_{n-1}(\mu)d\mu, n > 1,$$

on obtient un autre exemple de base de Schauder. La suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est appelée "système de Schauder". Signalons que le système de Schauder est aussi une base monotone de $\mathcal{C}\,[0,1]$.

Notons qu'un espace de Banach ayant une base de Schauder est séparable, mais la réciproque n'est en général pas vraie, ce problème est resté longtemps ouvert et a été résolu par P. Enflo [14]. Tandis que le problème du fait que chaque espace de Banach de dimension infinie admet ou non une suite basique admet une réponse positive. Plus précisément, on a :

Théorème 1.3.1. *Chaque espace de Banach de dimension infinie contient une suite basique.*

La preuve de ce résultat est dû à S. Mazur.

Définition 1.3.3. Deux bases de Schauder, $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de X et $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ de Y, sont dites équivalentes si :

$$\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

Il s'en suit du théorème du graphe fermé que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est équivalente à $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme T de X dans Y pour lequel $Tx_n = y_n$ pour tout n.

Une méthode très utilisée pour obtenir de nouvelles suites basiques, est celle des blocks de bases.

Définition 1.3.4. Soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite basique dans un espace de Banach, une suite de vecteurs non nuls $\{u_j\}_{j=1}^{+\infty}$ dans X de la forme $u_j = \sum\limits_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n x_n$, où $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sont des scalaires $(p_1 < p_1 < ...)$ est dite block de suite basique.

Notons que le block de base $\{u_j\}_{j=1}^{+\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une suite basique pour laquelle la constante basique est inférieure ou égale à celle de $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Bases seminormalisées

Définition 1.3.5. Soit X un espace de Banach complexe et soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une base de Schauder de X, on dit que $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est une base seminormalisée s'ils existent deux constantes a et b tels que

$$0 < a \leq \|x_n\| \leq b$$

pour tout $n \geq 1$.

1.3.2 Bases inconditionnelles

Avant de donner quelques propriétés sur les bases inconditionnelles, on va présenter quelques notions sur la convergence inconditionnelle.

Proposition 1.3.2. *Soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de vecteurs dans un espace de Banach X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\pi(n)}$ convergent pour toutes les permutation π des entiers.

(ii) Les séries $\sum_{i=1}^{+\infty} x_{n_i}$ convergent pour tout choix de $n_1 < n_2 < n_3 < ...$

(iii) Les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n x_n$ convergent pour tout choix de signe θ_n $(\theta_n = \pm 1)$.

(iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $\left\| \sum_{i \in \delta} x_i \right\| < \varepsilon$ pour tout ensemble fini d'entiers δ satisfaisant $\min\{i \in \delta\} > n$.

Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ qui satisfait l'une des conditions mentionnées précédemment est dite inconditionnellement convergente.

Remarque 1.3.2. En dimension finie, une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge inconditionnellemment si et seulement si elle est normalement convergente, c'est à dire $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < \infty$. Dans les espaces de dimensions infinies, il existe toujours des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ qui converge inconditionnellement mais non normalement, c'est une conséquence d'un résultat dû à Dvoretzky et Rogers [13].

Théorème 1.3.2. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Soit $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Alors, il existe une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ convergente inconditionnellement dans X tel que $\|x_n\| = \lambda_n$ pour tout n.*

Pour déduire ce qui est indiqué dans la Remarque 1.3.2, il suffit de prendre $\lambda_n = \frac{1}{n}$ dans le théorème précédent.

Passons à la définition des bases inconditionnelles :

Définition 1.3.6. Une base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ d'un espace de Banach X est dite inconditionnelle, si pour tout x dans X, sa série en termes de base $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge inconditionnellement.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la Proposition 1.3.2.

Proposition 1.3.3. *Une suite basique $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est inconditionnelle si et seulement si les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour chaque permutation π d'entiers, la suite $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ est une suite basique.
(ii) Pour tout sous-ensemble δ d'entiers, la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ entraîne celle de $\sum_{n\in\delta} a_n x_n$.
(iii) La convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ implique la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x_n$ pour $|b_n| \leq |a_n|$, $\forall n \geq 1$.

Le résultat suivant donne une majoration utilisant la constante inconditionnelle.

Proposition 1.3.4. *Soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite basique inconditionnelle avec une constante inconditionnelle k. Alors, pour tout choix de scalaires $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge et pour tout choix de la suite bornée des scalaires $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$, on a :*

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| \leq 2k \sup_n |\lambda_n| \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\| .$$

Exemples de bases inconditionnelles :

1- Les vecteurs unitaires $e_n = (0, 0, ..., 0, 1^n, 0, ...)$ dans l_p et c_0.

2- Le système de Haar dans les espaces $L_p\,[0,1]\,,\ (1 < p < \infty)\,.$

Exemples d'espaces de Banach n'ayant pas de bases inconditionnelles :

Les espaces $L_1\,[0,1]$ et $C\,[0,1]$ n'admettent pas des bases inconditionnelles.

1.3.3 Supports et intervalles

Soit c_{00} l'espace vectoriel des suites scalaires ayant des supports finis et soit $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ la base standard de c_{00}. On se donne un vecteur $a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$, son support noté $supp(a)$ est l'ensemble des entiers n tels que $a_n \neq 0$. On se donne deux sous-ensembles $E,\ F \subset \mathbb{N}$, on note $E < F$ si $\max E < \min F$. Si $x, y \in c_{00}$, on note $x < y$ si $supp(x) < supp(y)$. On note aussi $n < x$ $(n \in \mathbb{N})$ si $n < \min supp(x)$.
Si $x_1 < ... < x_n$, on dit que les vecteurs $x_1, ..., x_n$ sont successifs. On se donne un sous-ensemble $E \subset \mathbb{N}$ et soit a un vecteur donné comme précédemment, on écrit Ea pour désigner le vecteur $\sum_{n \in E} a_n e_n$. Un intervalle d'entiers est un ensemble de la forme $\{n, n+1, ...m\}$ et le rang du vecteur x, noté $ran(x)$, est le plus petit intervalle contenant $supp(x)$.

Chapitre 2

Propriétés des opérateurs polynomiallement de Riesz et décomposition de West dans les espaces de Banach

Résumé : l'objectif de ce chapitre est de donner une étude d'investigation des opérateurs polynomiallement de Riesz agissant sur les espaces de Banach, cette analyse permet de répondre positivement (d'une façon partielle) à une conjecture dûe à M. R. F. Smyth ([52], page 149). De plus, on étudie la décomposition de West pour certaines classes d'opérateurs de Riesz et ce dans un cadre Banachique. Nos résultats raffinent ceux établis par [58, 34] et permettent de comprendre le phénomène qui les lie.

2.1 Introduction

En vertu du fameux théorème de Lomonsov [36], chaque opérateur polynomiallement compact admet un sous-espace invariant non trivial. Ce résultat n'est pas applicable dans le cas des opérateurs polynomiallement de Riesz. En effet, C. Read [45] a donné l'exemple d'un opérateur strictement singulier n'admettant aucun sous-espace invariant non trivial, ceci peut être vu comme une réponse au fait que les perturbations de Fredholm ne sont pas nécessairement des opérateurs polynomiallement compacts. Une des questions majeures en théorie des opérateurs consiste à caractériser les opérateurs de Riesz (resp. polynomiallement de Riesz) sur les espaces de Banach. Ce sujet est lié directement à la structure géométrique de chaque espace de Banach. Les progrès dans ce domaine des mathématiques a connu un développe-

ment considérable, notamment les résultats établis dans cette direction par T. Gowers, B. Maurey. T. Schlumprecht et d'autres mathématiciens [1, 3, 5, 24, 25, 50]. Cette découverte attirante a permi de diviser la structure des espaces de Banach en deux catégories, faisant l'objet du théorème de dichotomie de T. Gowers [24].
Un opérateur linéaire borné A sur X est appelé quasinilpotent si

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\right)=0$$

(ce qui équivaut à dire que $\sigma(A)=\{0\}$).
Une question restée longtemps ouverte consiste à savoir si chaque opérateur de Riesz peut être écrit sous la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur quasinilpotent, cette décomposition dite de West a été démontrée dans le cadre hilbertien par T. T. West [58], l'extension du résultat au cas des espaces l_p $(1\leq p<\infty)$ et plus générallement au cas des espaces ayant la propriété F.D.P.B.D a été obtenue par K. Davidson et D. Herrero [9]. En (1988), en utilisant le concept de la B-convexité des espaces $L_p[0,1]$ $(1<p<\infty)$, H. J. Zhong [59] a établi la décompostion de West sur ces espaces et le problème est toujours ouvert dans le cadre banachique. Néanmoins, M. R. F. Smyth ([52], page 149) a conjecturé que chaque opérateur de Riesz peut être décomposé en la somme d'une perturbation de Fredholm et d'un opérateur quasinilpotent.

2.2 Opérateurs polynomiallement de Riesz sur les espaces de Banach

Définition 2.2.1. Soit X un espace de Banach complexe et $A\in\mathcal{L}(X)$, on dit que A est un opérateur polynomiallement de Riesz (resp. polynomiallement une perturbation de Fredholm) s'il existe un polynôme complexe non nul P tel que $P(A)$ est un opérateur de Riesz (resp. $P(A)$ est une perturbation de Fredholm).

La conjecture de Smyth nous pousse à donner la définition suivante de la décomposition de Smyth.

Définition 2.2.2. Soit X un espace de Banach complex et R un opérateur de Riesz dans $\mathcal{L}(X)$. On dit que R satisfait la décomposition de Smyth si $R = F + Q$ où F est une perturbation de Fredholm et Q un opérateur quasinilpotent.

Il est facile de voir que chaque opérateur de Riesz admettant la décomposition de West satisfait la décomposition de Smyth. L'inverse est un problème ouvert du fait qu'il n'y pas une bonne connaissance de la description de la classe des perturbations de Fredholm via les opérateurs compacts et quasinilpotents. On rappelle seulement que sur les espaces l_p $(1 \leq p < \infty)$, les deux décompositions sont équivalentes, ceci est une conséquence immédiate de l'unicité de l'idéal bilatère fermé dans $\mathcal{L}(l_p)$ [21].

Commençons notre analyse par le résultat crucial suivant qui va être utilisé dans la suite :

Théorème 2.2.1. *[10] Soit X un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel qu'il existe un polynôme complexe P non constant pour lequel $\sigma_e(P(T))$ a un intérieur vide, alors l'intérieur de l'ensemble $\sigma_e(T)$ est aussi vide. De plus, si T est un opérateur polynomiallement de Riesz, alors*

$$\sigma_e(T) = \sigma_\omega(T)$$

est un ensemble fini. Aussi, si T est un opérateur de Riesz, alors T est polynomiallement une perturbation de Fredholm si et seulement si T^n est une perturbation de Fredholm pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Si l'ensemble $\sigma_e(P(T))$ admet un intérieur vide, alors le théorème de l'application spectrale montre que

$$P\left(\overset{\circ}{\widehat{\sigma_e(T)}}\right) = \overset{\circ}{\widehat{\sigma_e(P(T))}} = \emptyset,$$

le fait que P est une fonction analytique non-constante, donc c'est une application ouverte, alors si l'ensemble $\overset{\circ}{\widehat{\sigma_e(T)}}$ est non vide, $\overset{\circ}{\widehat{\sigma_e(P(T))}}$ doit être non vide, ce qui est une contradiction et le résultat donc est conclu. Maintenant, si $P(T)$ est un opérateur de Riesz pour un certain polynôme complexe P, alors il s'ensuit que

$$P(\sigma_e(T)) = \sigma_e(P(T)) = \{0\},$$

ce qui implique que $\sigma_e(T)$ est fini (l'ensemble des zéros d'un polynôme complexe). Pour prouver que

$$\sigma_e(T) = \sigma_\omega(T),$$

il suffit de montrer que $\mathbb{C}\backslash\sigma_e(T) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_\omega(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_e(T)$, l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\sigma_e(T)$ est connexe et contient en particulier l'ensemble résolvant de T. La stabilité de l'indice sur les composantes connexes montre que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_\omega(T)$ et montre le résultat pour la seconde assertion. Maintenant, soit P un polynôme complexe non constant tel que $P(T)$ est une perturbation de Fredholm. Écrivons

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_m),$$

on a

$$a_0(T - \lambda_1 I)...(T - \lambda_m I) = F,$$

où F est une perturbation de Fredholm. Comme T est un opérateur de Riesz, on a $T - \lambda_i I$ est un opérateur de Fredholm pour tout $1 \leq i \leq m$ $(\lambda_i \neq 0)$, donc il va exister nécessairement au moins un λ_i tel que $\lambda_i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$; si ce n'était pas le cas, alors F est à la fois un opérateur de Fredholm et une perturbation de Fredholm, ce qui contredit la dimension infinie de X. On déduit donc, pour un certain $1 \leq n \leq m$, $a_0T^nS = F$ où $S \in \Phi^b(X)$, il va exister $K_1 \in \mathcal{K}(X)$, $A_0 \in \mathcal{L}(X)$ tels que $SA_0 = I - K_1$ (voir Théorème 1.1.1) donc $a_0T^nSA_0 = FA_0$, ce qui implique que $a_0T^n(I - K_1) = FA_0$ et par suite que $a_0T^n = FA_0 + a_0T^nK_1$, mais $F \in \mathcal{F}^b(X)$ et $K_1 \in \mathcal{K}(X)$. Ceci montre que $FA_0 + a_0T^nK_1 \in \mathcal{F}^b(X)$ et finallement $T^n \in \mathcal{F}^b(X)$ ce qui termine la preuve. La réciproque est triviale.

Remarque 2.2.1. Il est facile de voir les implications suivantes : T est polynomiallement compact $\Rightarrow$ T est polynomiallement une perturbation de Fredholm $\Rightarrow$ T est polynomiallement de Riesz $\Rightarrow$ $\sigma_\omega(T)$ est un ensemble fini.

On signale qu'en général, les réciproques des deux premières implications ne sont pas vraies, en effet, pour la première implication, il suffit de prendre l'exemple établi par C. Read [45] concernant un opérateur strictement singulier (donc polynomiallement une perturbation de

Fredholm et par suite polynomiallement de Riesz) mais il n'est pas polynomiallement compact car il n'admet aucun sous-espace invariant non-trivial.
Pour la deuxième implication, on peut prendre le célèbre exemple suivant dû à C. Foias et C. Pearcy [18, 29, 42].
$T : l_2 \to l_2$ défini par $T(e_1) = 0$ et $T(e_{n+1}) = z_n e_n$, $n \geq 1$ où $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est la base canonique de l_2 et la suite $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est donnée par :

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{16}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{64}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}, ...\right\},$$

cette suite peut être écrite sous la forme $z_n = \frac{1}{2^{4^k}}$ si $n = 2^k (\operatorname{mod} 2^{k+1})$. Pour tout $n \geq 1$, T^n n'est pas un opérateur compact, en effet, on sait que si S est un opérateur borné non nul commutant avec T, alors S ne peut pas être compact (voir [18], Théorème 5, page 403) et comme chaque puissance de T commute avec T, on obtient que T^n n'est pas un opérateur compact, mais il est quasinilpotent, donc T est un opérateur de Riesz et triviallement donc, polynomiallement de Riesz, l'utilisation du Théorème 2.2.1 combiné avec l'unicité de l'idéal bilatère fermé dans $\mathcal{L}(l_2)$ implique que T n'est pas polynomiallement compact.

Définition 2.2.3. Un espace de Banach est dit décomposable s'il est la somme topologique directe de deux sous-espaces fermés de dimensions infinies.

Un espace de Banach est dit héréditairement indécomposable (en abrégé H.I) s'il ne contient aucun sous-espace fermé de dimension infinie décomposable. La classe des espaces hériditairement indécomposables a été introduite et étudiée par T. Gowers and B. Maurey [25]. Un espace de Banach complexe X est dit quotient héréditairement indécomposable (en abrégé Q.H.I) si aucun de ses espaces quotients de dimensions infinies n'est décomposable, l'un des résultats fondamentaux lié à ces classes d'espaces H.I et Q.H.I est donné par le lemme suivant. Pour plus de détails, on peut se reférer à [17, 23, 25].

Lemme 2.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe*
a) Si X est H.I, alors chaque opérateur linéaire borné dans $\mathcal{L}(X)$ s'écrit sous la forme $\lambda I + S$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $S \in \mathcal{S}(X)$.
b) Si X est Q.H.I, alors chaque opérateur linéaire borné dans $\mathcal{L}(X)$ s'écrit sous la forme $\lambda I + S$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $S \in \mathcal{CS}(X)$.

Remarque *2.2.2.* On signale que les réciproques des assertions (a) et (b) du Lemme 2.2.1 sont en général fausses. En effet, V. Ferenczi [16] a établi une construction complexe d'un espace de Banach indécomposable X ayant des copies de l_p (donc n'est pas un espace H.I) avec $\mathcal{L}(X) = \mathbb{C}I \bigoplus \mathcal{S}(X)$. Une autre caractérisation des espaces de Banach H.I a été donnée par le même auteur affirmant que :

X est un espace H.I $\iff$ $\mathcal{L}(Y,\ X) = \mathbb{C}I_{(Y,\ X)} \bigoplus \mathcal{S}(Y,\ X)$ pour tout sous-espace fermé Y de X (ici $I_{(Y,\ X)}$ est l'injection canonique de Y dans X).

Définition 2.2.4. Soit X un espace de Banach, X est dit un espace de Banach de Smyth si pour tout $R \in \mathcal{R}(X)$, R satisfait la décomposition de Smyth.

Dans la proposition suivante, on va donner que plusieurs espaces connus dans la littérature qui sont de Smyth.

Proposition 2.2.1. *Les espaces de Banach suivants sont de Smyth.*
1) l_p $(1 \leq p < \infty)$,
2) L_p $(1 < p < \infty)$,
3) $l_p \times l_r$ $(r \neq p)$,
4) les espaces H.I et Q.H.I,
5) $Z = X \times Y$ *où* X *est un espace H.I réflexif et* Y *sous-espace fermé de* X *tel que* $dim(X/Y) = \infty$.

Preuve. Pour les assertions (1) et (2), ceci découle immédiatement du fait que chaque opérateur de Riesz sur ces deux espaces satisfait la décomposition de West [9, 59].

(3) On suppose que $p < r$, soit $A \in \mathcal{L}(l_p \times l_r)$, alors A peut être mis sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{L}(l_p)$, $C \in \mathcal{L}(l_r, l_p)$, $D \in \mathcal{L}(l_p, l_r)$, et $E \in \mathcal{L}(\ l_r)$. D'autre part, on a $\mathcal{L}(l_r, l_p) = \mathcal{K}(l_r, l_p)$, $\mathcal{S}(l_p, l_r) = \mathcal{L}(l_p, l_r)$, (voir [35], Définition 2, c. 1), ceci montre que $\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^b(l_p \times l_r)$, de plus, il est facile d'observer que $B \in \mathcal{R}(\ l_p)$ et $E \in \mathcal{R}(l_r)$, il vient donc $B = K + Q$ et $E = \grave{K} + \grave{Q}$ où $K \in \mathcal{K}(\ l_p)$, $\grave{K} \in \mathcal{K}(l_r)$, Q et $\grave{Q}$ sont quasinilpotents, alors

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \grave{K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \grave{Q} \end{pmatrix}$$

La somme des trois premiers opérateurs est une perturbation de Fredholm dans $\mathcal{L}\left(l_p \times l_r\right)$ tandis que la somme des deux derniers est un opérateur quasinilpotent (car ce sont deux opérateurs quasinilpotents qui commutent), ce qui termine la preuve pour cette assertion. Notons aussi que sur cet espace P. Volkmann [55] a montré l'existence de deux idéaux maximaux tels que leur intersection est la classe des opérateurs strictement singuliers.

(4) Dans le cas des espaces H.I et Q.H.I, la décomposition de Smyth est triviale, en effet, sur ces espaces, on déduit directement que $\mathcal{R}(X) = \mathcal{S}(X) = \mathcal{F}^b(X)$ si X est H.I et $\mathcal{R}(X) = \mathcal{CS}(X) = \mathcal{F}^b(X)$ si X est Q.H.I.

(5) Ici, on a $\mathcal{L}\left(X,Y\right) = \mathcal{S}\left(X,Y\right) = \mathcal{F}^b\left(X,Y\right)$, ce qui implique que $\mathcal{L}\left(Y,X\right) = \mathcal{F}^b\left(Y,X\right)$ (voir [23]), de plus $\mathcal{R}(X) = \mathcal{S}(X) = \mathcal{F}^b(X)$ et $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{S}(Y) = \mathcal{F}^b(Y)$. Le reste de la preuve est identique au cas de l'assertion 3). Sur cet espace, M. Gonzalez [23] a donné une réponse négative concernant la relation entre les perturbations semi-Fredholm et la classe des strictement singuliers et strictement cosinguliers.

La proposition suivante caractérise les opérateurs polynomiallement de Riesz sur les espaces de Banach de Smyth.

Proposition 2.2.2. *[10] Soit X un espace de Banach de Smyth, alors $T \in \mathcal{L}\left(X\right)$ est polynomiallement de Riesz si et seulement si l'ensemble $\sigma_\omega(T)$ est fini. Dans ce cas, T se décompose en la somme finie suivante :*

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(F_i + Q_i + \lambda_i I\right)$$

où

(i) F_i est une perturbation de Fredholm $(1 \leq i \leq n)$;

(ii) les Q_i sont des opérateurs quasinilpotents $(1 \leq i \leq n)$;

(iii) $\sigma_\omega(T) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

Preuve. En tenant compte du Théorème 2.2.1, si T est polynomiallement de Riesz, alors $\sigma_\omega(T)$ est un ensemble fini, maintenant on examine l'inverse, si $\sigma_\omega(T)$ est fini, alors $\sigma_\omega(T) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$ et en prenant le polynôme $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, on peut établir que $P(T)$ est un opérateur de Riesz. En effet, on a $\sigma_e(P(T)) = P(\sigma_e(T)) = \{0\}$, ceci donne le résultat. D'autre part, on peut trouver une collection $\{\Delta_1,...,\Delta_n\}$ de sous-ensembles fermés de $\sigma(T)$ satisfaisant

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = \sigma(T)$;

(ii) $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ $(i \neq j)$;

(iii) $\lambda_i \in \Delta_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Si pour tout $i = 1, ..., n$, N_i est un voisinage de Δ_i qui ne contient pas d'autres points de $\sigma(T)$, en utilisant les projections spectrales $P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial N_i} (\lambda I - T)^{-1} \, d\lambda$ correspondantes aux Δ_i $(i = 1, ..., n)$, on peut décomposer T sous la forme

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} (T_i + \lambda_i I)$$

où $\sigma_e(T_i) = \{0\}$, c'est à dire que T_i est un opérateur de Riesz $\forall i = 1, ..., n$. Ensuite, en utilisant la décomposition de Smyth des opérateurs de Riesz, chaque T_i est la somme d'une perturbation de Fredholm et d'un opérateur quasinilpotent Q_i. Aussi, on peut argumenter comme suit : Écrivons $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) ... (\lambda - \lambda_n)$, il s'en suit que $P(T) = \bigoplus_{j=1}^{n} \left[\prod_{i=1}^{n} (F_j + Q_i + (\lambda_j - \lambda_i) I) \right]$. On observe alors que, pour tout $j = 1, ..., n$, la j-ième somme peut être mise sous la somme d'une perturbation de Fredholm et d'un opérateur de la forme $V_j = Q_j^n + \alpha_{n-1} Q_j^{n-1} + ... + \alpha_1 Q_j$ $(\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, ..., n-1)$. Maintenant, il est bien connu que si a et b sont des éléments quasinilpotents qui commutent dans une algèbre de Banach, alors $a + b$ et ab sont aussi quasinilpotents, donc on peut facilement vérifier que V_j est un opérateur quasinilpotent pour tout $j = 1, ..., n$ et par suite : $T = \bigoplus_{i=1}^{n} (F_i + Q_i + \lambda_i I)$, où

(i) Les F_i sont des perturbations de Fredholm.

(ii) Les Q_i sont quasinilpotents.

(iii) $\sigma_\omega(T) = \{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

Ce qui termine la preuve.

Remarque 2.2.3. Sur les espaces $L_p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$, en tenant compte de la coïncidence des classes des perturbations semi-Fredholm ([56], page 287), on conclut que T est polynomiallement strictement singulier $\Longleftrightarrow$ T polynomiallement strictement cosingulier $\Longleftrightarrow$ T polynomiallement une perturbation de Fredholm $\Rightarrow$ T polynomiallement de Riesz.
De plus sur ces espaces, on a le lemme suivant.

Lemme 2.2.2. *Soit $X = L_p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$ et soit $T \in \mathcal{L}(X)$, alors T est polynomiallement compact $\Longleftrightarrow$ T est polynomiallement une perturbation de Fredholm.*

Preuve. Il suffit de prouver la seconde implication. En tenant compte de ([38], Théorème 1b), le résultat est établi.

Donnons à présent la décomposition suivante des opérateurs strictement singuliers sur les espaces $L_p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$.

Proposition 2.2.3. *[10] Soit $X = L_p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$ et soit S un opérateur strictement singulier sur X, alors S peut être écrit sous la forme $S = K + Q + R$ où K est compact, Q est nilpotent $(Q^2 = 0)$ et $PR = RP$ pour une projection P bien choisie sur X.*

Preuve. Il suffit de démontrer le résultat pour $p > 2$, le cas $1 < p < 2$ est établi par dualité. Soit S un opérateur strictement singulier sur X, alors pour tout sous-espace fermé de dimension infinie M de X, on peut trouver un sous-espace de dimension infinie H tel que $H \subseteq M$ et que la restriction de S à H est compact. De plus, en tenant compte du théorème de Kadec-Pelczynski [6] qui affirme que chaque sous-espace fermé de dimension infinie de X, ou bien il est isomorphe à l_2 et admettant un complémentaire topologique, ou bien il contient un sous-espace fermé isomorphe à l_p et admettant un complémentaire topologique dans X, on peut donc trouver une projection non triviale P sur X telle que SP est compact, ceci montre que S peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$S = \begin{pmatrix} PSP & PS(I-P) \\ (I-P)SP & (I-P)S(I-P) \end{pmatrix}$$

sur l'espace $P(X) \bigoplus (I-P)(X)$.

Signalons que PSP et $(I-P)SP$ sont tous les deux compacts. Alors, si on pose

$$K = \begin{pmatrix} PSP & 0 \\ (I-P)SP & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & PS(I-P) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I-P)S(I-P) \end{pmatrix}$$

on obtient que K est compact, Q est nilpotent ($Q^2 = 0$) et $PR = RP$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Remarque 2.2.4. Il est clair que si l'opérateur $(I-P)S$ est compact, alors $S = K_1 + Q$ où K_1 est compact et Q est nilpotent.

2.3 Remarques générales

Dans cette section, on présente quelques remarques sur les deux fameux exemples d'opérateurs strictement singuliers non compacts, le premier opérateur est dû à I. Gohberg, A. Markus et I. A. Feldmann [21] et construit sur les espaces $L_p([-1,1])\,(1 \leq p < \infty)$ tandis que le deuxième, il peut être construit à la fois sur l'espace H.I de T. Gowers et B. Maurey ou bien sur l'espace complémentablement minimal S dû à T. Schlumprecht [50].

***Exemple* 2.3.1.** *Écrivons $L_p[-1,1]$ sous la forme*

$$L_p([-1,1]) = L_p[0,1] \bigoplus L_p[-1,0].$$

Soit $N \subseteq L_p[0,1]$; $(p \geq 1)$ le sous-espace fermé engendré par le système de fonctions

$$y_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{p}} \text{ si } t \in \left[2^{-k}, 2^{1-k}\right] \quad (k = 1, 2, ...), \\ 0 \text{ si } t \notin \left[2^{-k}, 2^{1-k}\right] \quad (k = 1, 2, ...). \end{cases}$$

Soit $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ la base canonique de l_p. L'opérateur $S \in \mathcal{L}(N, l_p)$ défini par les égalités $S(y_k) = e_k$ $(k = 1, 2, ...)$ envoie N isométriquement dans $L_p[0,1]$, ceci se déduit immédiatement du fait que l'opérateur Q défini par :

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\, y_k, \;\; (x \in L_p[0,1])$$

où

$$f_k(x) = \int_0^1 x(t)\,[y_k(t)]^{p-1}\,dt, (x \in L_p[0,1]\,, k = 1, 2, ...)$$

est une projection qui envoie tout l'espace $L_p[0,1]$ *sur* N*. Maintenant, soit* $R \subseteq L_2[-1,0]$ *le sous-espace fermé engendré par le système de fonctions de Rademacher*

$$r_k(t) = sign \sin\left(2^k \pi t\right)(k = 1, 2, ...)\,.$$

Alors R *est un sous-espace fermé dans chaque* $L_p[-1,0]$ $(1 \leq p < \infty)$ *et dans* R*, les normes des espaces* L_p $(1 \leq p < \infty)$ *sont topologiquement équivalentes, de plus, si* $p \geq 2$*, il existe un supplémentaire topologique de* R *dans* $L_p[-1,0]$*. La projection donnée ici est*

$$\overline{Q}\;(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{-1}^{0} x(s)\, r_k(s) ds \right) r_k \;(x \in L_p[-1,0]).$$

Donc

$$L_p([-1,1]) = L_p[0,1] \bigoplus L_p[-1,0] = L_p[-1,0] \bigoplus N \bigoplus F$$

(où F *est un supplémentaire topologique de* N *dans* $L_p[0,1]$*). On définit l'opérateur* T *par :*

$$T\left(x + z + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k r_k$$

$$(x \in L_p[-1,0]\,,\; z \in F)\,(\text{si } 1 \leq p < 2)$$

et

$$T\left(x+y+\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k r_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k y_k$$

$$(x\in L_p\left[0,1\right],\ y\in G)\ \ (\text{si } p\geq 2),$$

(où G est un supplémentaire topologique de R dans $L_p\left[-1,0\right]$).

Remarque 2.3.1. T est un opérateur linéaire borné strictement singulier sur les espaces $L_p\left[-1,1\right]$ $(1\leq p<\infty)$ mais il n'est pas compact, de plus il est nilpotent, en effet $(T^2=0)$ et pour le cas $p=1$, ceci donne l'exemple d'un opérateur faiblement compact (non compact).

***Exemple* 2.3.2.** *Soit c_{00} l'espace vectoriel des suites réelles pour lesquelles seulement un nombre fini de coordonnées sont non nulles et S est l'espace de Banach complémentablement minimal construit par T. Schlumprecht dans [50]. Dans [1], les auteurs ont montré l'existence d'une suite de blocks seminormalisés $(x_i^*)_{i=1}^{+\infty}$ dans S^* et une suite réelle croissante $C\left(l\right)_{l\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^+$ $(l\rightarrow+\infty)$, pour laquelle la condition suivante est satisfaite :*

H) Si $(z_i)_{i=1}^{+\infty}$ est une suite de blocks dans S tel que $\forall i\in\mathbb{N}$, $x_i^*\left(z_i\right)=1$ et $x_{i-1}^*<z_i<x_{i+1}^*$ $(x_0^*=0)$, alors pour tout $2\leq l\in\mathbb{N}$ et $(\lambda_i)_{i=1}^{+\infty}\in c_{00}$, on a : $\left\|\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\lambda_i e_i\right\|_l\leq\frac{1}{C(l)}\left\|\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\lambda_i z_i\right\|_s.$ (où $\left\|.\right\|_l$ est une norme équivalente à celle de S). Alors l'opérateur $\widetilde{T}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_i^*\bigotimes e_i$ avec $\widetilde{T}\left(x\right)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}x_i^*\left(x\right)e_i$, $(x\in S$ est borné, strictement singulier mais qui n'est pas compact.

Remarque 2.3.2. Cet opérateur montre que l'espace $H.I$ construit par T. Gowers et B. Maurey n'est pas simple, c'est à dire, dans ce cas l'ensemble des opérateurs compacts n'est pas l'unique idéal bilatère fermé dans l'algèbre des opérateurs linéaires bornés, $\widetilde{T}$ est quasinilpotent. En effet , comme $\widetilde{T}$ est strictement singulier, alors son spectre doit satisfaire la théorie de Riesz-Schauder, un calcul simple montre que l'équation $\widetilde{T}\left(x\right)=\lambda x$ $(x\neq 0)$ n'admet aucune solution non nulle pour $\lambda\neq 0$, ce qui prouve que le spectre de $\widetilde{T}$ est réduit à l'ensemble $\left\{0\right\}$.

Remarque 2.3.3. Signalons aussi que les noyaux des opérateurs strictement singuliers sur les espaces de Banach peuvent être de dimensions finies. Dans l'exemple précédent, l'espace $N\left(\widetilde{T}\right)$ est de dimension infinie, car l'ensemble $\mathbb{N}\backslash \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} Supp\left(x_i^*\right)$ est infinie (où $Supp\left(x_i^*\right)$ est le support de x_i^* dans S^*) (pour plus de détails, voir [1]).

2.4 Décomposition de West pour certaines classes d'opérateurs de Riesz sur les espaces de Banach

Commençons cette étude par le résultat classique suivant d'analyse.

Lemme 2.4.1. *Soit* $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ *une suite de nombres complexes telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, *alors, il existe une sous-suite* $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ *pour laquelle la série* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_{n_k}|$ *est convergente.*

Preuve. Comme $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_n = 0$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, on a : $|\lambda_n| < \varepsilon$, si on prend $\varepsilon = 1$, il va exister donc un n_1 tel que $|\lambda_{n_1}| < 1$, puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on peut choisir $n_2 > n_1$ tel que $|\lambda_{n_2}| < \frac{1}{2}$ et ainsi de suite, on construit donc une sous-suite $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ $(n_{k+1} > n_k)$ telle que $|\lambda_{n_k}| < \frac{1}{2^{n_k}}$, ceci entraîne que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_{n_k}| < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n_k}} < 2$ et par suite la convergence de la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_{n_k}|$ est établie.

Soit $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, on désigne par $\Xi_\infty\left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right]$ l'ensemble de toutes les sous-suites $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ des nombres entiers telle que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\lambda_{n_k}|$ convergent, il est clair que d'après le Lemme 2.4.1, l'ensemble $\Xi_\infty\left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right]$ est non vide.

Définition 2.4.1. Soit X un espace de Banach complexe et désignons par $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Riesz sur X.

Corollaire 2.4.1. *Soit* X *un espace de Banach complexe et soit* $A \in \mathcal{R}(X)$, *alors le spectre de* A, $\sigma(A)$ *consiste au plus à une suite dénombrable de valeurs propres de multiplicités algébriques finies* $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

Remarque 2.4.1. Soit $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes telles que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, si $\mathbb{N} \in \Xi_\infty \left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right]$ (en d'autres termes si $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| < \infty$), alors $\Xi_\infty \left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right] = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (identification par bijection).

Définition 2.4.2. Soit X un espace de Banach complexe et soit $T \in \mathcal{R}(X)$, on suppose que σ est un ensemble spectral de T (qui est ouvert et fermé de $\sigma(T)$), désignons par $P(\sigma;\ T)$ la projection spectrale de T correspondante à σ. Si u est une valeur propre isolée de $\sigma(T)$, on écrit $P(u;\ T)$ pour $P(\{u\};\ T)$.

Définition 2.4.3. Soit X un espace de Banach complexe et soit $(M_j)_{j=0}^{+\infty}$ une suite de sous-espaces de X. Cette suite est appelée une chaîne de sous-espaces de X si :

(i) $M_0 = \{0\}$ et chaque M_j est un sous-espace fermé de X pour tout j.

(ii) $M_j \subset M_{j+1}$ et $M_j \neq M_{j+1}$ pour tout j.

Une chaîne $(W_n)_n$ est un refinement de la chaîne $(M_j)_{j=0}^{+\infty}$ si $(M_j)_{j=0}^{+\infty}$ est une sous-suite $(W_n)_n$.

Définition 2.4.4. Soit X un espace de Banach complexe et soit $T \in \mathcal{R}(X)$, supposons que $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ est l'ensemble de ses valeurs propres isolées. On note par R_j l'image de l'opérateur $P_1 + ... + P_j$ $(R_j = \mathrm{Im}(P_1 + ... + P_j)$ où $P_i = P(\lambda_i;\ T)$.

Si $(W_n)_{n\geq 1}$ est un refinement de (R_j), alors pour tout n, on définit

$$k(n) = \min\{j : R_{j-1} \subset W_n \subset R_j\}.$$

On dit que $(W_n)_{n\geq 1}$ est T-invariant si $T(W_n) \subset W_n$ $(n \geq 1)$.

Avant d'établir le résultat principal de cette partie, énonçons à présent, le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.4.1. *[31] Soit X un espace de Banach complexe et soit $T \in \mathcal{R}(X)$. On suppose que $(W_n)_{n\geq 1}$ est un refinement T-invariant de (R_j) , soit (E_n) une suite de projections dans $\mathcal{L}(X)$ satisfaisant ce qui suit :*

(i) $E_m E_n = 0$ si $m > n$,

(ii) $R(E_1) + ... + R(E_n)$ est dense dans W_n,

(iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_{k(n)} E_n$ *converge uniformément dans* $\mathcal{L}(X)$.
Alors $T = S + Q$ *où* S *est un opérateur compact et* Q *quasinilpotent, de plus* $[S, Q] = SQ - QS$ *est quasinilpotent.*

Notre résultat principal donne une condition suffisante permettant d'assurer la décomposition de West pour une certaine classe d'opérateurs de Riesz.

Théorème 2.4.2. *Soit* X *un espace de Banach complexe et soit* $T \in \mathcal{R}(X)$, *notons par* $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ *l'ensemble de ses valeurs propres isolées (comptées avec leurs ordres de multiplicités). Soit* $(n_k)_{k=1}^{+\infty}$ *une sous-suite d'entiers telle que* $(n_k)_{k=1}^{+\infty} \in \Xi_\infty \left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right]$, *on suppose que* $(k(n))_{n=1}^{+\infty} \subseteq (n_k)_{k=1}^{+\infty}$, *alors* $(k(n))_{n=1}^{+\infty} \in \Xi_\infty \left[(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}\right]$ *et par suite* T *admet la décomposition de West,* $T = K + Q$ *où* K *est un opérateur compact et* Q *quasinilpotent, de plus,* $[K, Q]$ *est quasinilpotent.*

Preuve. Pour tout n, soit E_n la suite des projections de normes 1 dans $\mathcal{L}(X)$ donnée par $E_n(x) = x_n^*(x)\, x_n$ où les x_n et x_n^* sont convenablement choisis (voir [31]) de telle façon que les conditions (i) (ii) du Théorème 2.4.1 soient satisfaites, il suffit d'établir donc la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_{k(n)} E_n$. En effet, on a :
$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\|\lambda_{k(n)} E_n\right\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\lambda_{k(n)}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\lambda_{n_k}\right| < \infty$ (car $(k(n))_{n=1}^{+\infty} \subseteq (n_k)_{k=1}^{+\infty}$), ceci entraîne la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_{k(n)} E_n$. Les résultats de la décomposition découlent donc du Théorème 2.4.1.

2.4.1 Cas spéciaux

Cas des espaces de Hilbert [58]

La décomposition de West des opérateurs de Riesz sur les espaces de Hilbert a été démontrée par T. West (1966), la compréhension du phénomène réside dans ce qui suit :
Pour H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{R}(H)$, supposons que $(\lambda_i)_{i=1}^{+\infty}$ est l'ensemble de ses valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies (comptées avec leurs ordres de multiplicités).

On distingue ici deux situations :

a) La suite $(\lambda_i)_{i=1}^{+\infty}$ est finie :

On pose $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\lambda_i;\ T)$, alors S est un opérateur de rang fini, donc compact, de plus, l'opérateur $Q = T - S$ est quasinilpotent ($\sigma(Q) = \{0\}$).

La décomposition est triviale dans ce cas, écrivant $T = S + Q$.

b) La suite $(\lambda_i)_{i=1}^{+\infty}$ est infinie :

Ici, on prend $(E_n)_{n\geq 1}$ la suite des projections orthogonales de H dans $R_n \cap (R_{n-1})^{\perp}$.

Les conditions (i) et (ii) du Théorème 2.4.1 sont satisfaites. D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ et moyennant la preuve du Théorème 2.4.1 (voir [31]), on montre que $\left\| \sum_{n=m}^{+\infty} \lambda_n E_n \right\|^2 \leq \sup\{|\lambda_n| : n \geq m\}$. Ceci entaîne que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n E_n$ converge uniformément dans $\mathcal{L}(X)$.

La condition (iii) du Théorème 2.4.1 est donc vérifiée en prenant simplement $k(n) = n$ et le résultat de la décomposition est établi.

Cas du résultat dû à C. Laurie et H. Radjavi (1980) [34]

C'est le fruit d'un travail fourni par ces deux auteurs, leur méthode a été en fait une adaptation des techniques investiguées dans le cadre hilbertien au cas des espaces de Banach abstraits en remplaçant les projections de Riesz $\{P_j\}$ par d'autres de normes minimales et ils procèdent à construire des blocks d'opérateurs compacts dans la décomposition ; néanmoins la condition qu'ils ont imposée pour la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,|\lambda_n|$ est trop forte car elle implique en fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|$ converge et par suite le résultat de la décomposition découle immédiatement du Théorème 2.4.2.

Chapitre 3

Quelques propriétés spectrales des opérateurs linéaires sur les espaces exotiques

Résumé : Dans ce chapitre, on va présenter quelques résultats concernant les opérateurs linéaires définis sur diverses classes d'espaces de Banach dits "exotiques" contenant en particulier ceux étudiés respectivement par V. Ferenczi [17, 15] et T. Gowers avec B. Maurey [25, 26]. On montre que, sur les espaces héréditairement indécomposables ou bien à quotients héréditairement indécomposables, l'ensemble des opérateurs de Fredholm bornés est dense dans $\mathcal{L}(X)$, ceci entraîne en particulier que la frontière des opérateurs de Fredholm bornés n'est autre que l'idéal des opérateurs strictement singuliers si X est un espace $H.I$ et l'idéal des opérateurs strictement cosinguliers si X est un espace $Q.H.I$. D'autre part, une comparaison entre les espaces suffisamment riches et les espaces de Banach exotiques est donnée via quelques propriétés des applications spectre et spectre essentiel de Wolf ayant leurs images dans l'ensemble de tous les ensembles compacts non vides du plan complexe.

3.1 Introduction

Il est bien connu que la théorie des espaces de Banach et celle des opérateurs qui lui est associée jouent un rôle central en mathématiques pures et appliquées. L'évolution dans ce contexte est toujours d'actualité. En effet, jusqu'a nos jours, les spécialistes n'ont pas réussi à trouver un critère efficace permettant de donner une classification idéale des espaces de Banach et ce malgré les résultats pertinents découverts ces dernières années clarifiant et donnant des réponses à de multiples questions restées longtemps ouvertes. Les mathématiciens se posaient toujours la question sur l'existence ou non d'un espace de Banach indécomposable, si oui, admet il ou non un sous-espace décomposable ? ceci n'est pas le fruit du hasard, en effet, il savaient bien que les espaces auxquels ils étaient habitués sont décomposables et suffisamment riches, en d'autres termes ayant un nombre infini de projections non triviales, par exemple, les espaces l_p, L_p, l'espace $C\left[0,1\right]$, cette question a été résolue négativement par T. Gowers et B.Maurey (1991) [24, 25], qui ont construit un espace de Banach réflexif (donc séparable) tel que ni lui, ni chacun de ses sous-espaces fermés de dimensions infinies est décomposable. Cette découverte a permi de résoudre de fameux problèmes, en l'occurrence : le problème de la base inconditionnelle, le problème scalaire identité plus une perturbation de Fredholm et le problème de l'hyperplan de Banach (un espace de Banach est isomorphe ou non à ces sous-espaces de codimensions finies). Il a été annoncé que la source de cette découverte est l'espace de Banach de B. S. Tsirelson (1974) donnant l'exemple d'un espace de Banach réflexif ne possédant aucune copie de l_p ou c_0. A partir de cet espace, T. Schlumprecht [50] a établi son exemple d'un espace de Banach arbitrairement distortable. Ensuite, T. Gowers et B. Maurey ont pu construire leur espace héréditairement indécomposable et d'autres, ayant des propriétés étranges.

Comme il a été mentionné dans [26, 37], le principe de la construction de ces espaces est simple : on se donne un semigroupe relativement simple sur l'espace des suites scalaires (par exemple, le semigroupe engendré par les Schift à droite et à gauche), alors la construction des espaces de Banach tels que chaque opérateur linéaire borné est ou bien strictement singulier ou presque une perturbation d'un élément de l'algèbre engendré par ce semigroupe par un opérateur strictement singulier est établie. Donnons à présent quelques exemples de ces espaces non héréditairement indécomposables avec leurs propriétés surprenantes :

I- L'espace Shift X_s

1- L'espace X_s est premier ;

2- Tous les sous-espaces fermés de X_s ayant la même codimension sont isomorphes ;

3- L'espace X_s est indécomposable mais n'est pas H.I ;

4- Comme une conséquence de 3, X_s n'admet pas des projections non-triviales ;

5- Chaque deux opérateurs linéaires bornés sur X_s commutent modulo des perturbations strictement singulières.

II- L'espace double Shift X_d

1- L'espace X_d est isomorphe à ses sous-espaces de codimensions paires mais il n'est pas isomorphe à ceux de codimensions impaires. En particulier, il est isomorphe à ses sous-espaces de codimensions 2 mais pas à ses hyperplans.

2- Comme une conséquence de 1 est que chaque opérateur de Fredholm est d'indice pair.

3- L'espace X_d n'est isomorphe à aucun de ses sous-espaces de codimensions infinies.

III- L'espace ternaire X_t

Cet espace ternaire X_t est isomorphe à son cube $X_t^3 = X_t \bigoplus X_t \bigoplus X_t$ mais non à son carré $X_t^2 = X_t \bigoplus X_t$.

IV- L'espace de Banach $\mathcal{E}$

Soit $\mathcal{T}$ l'arbre ternaire $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \{0,1,2\}^n$, Y_{00} l'espace vectoriel des suites scalaires ayant des supports finis induit par $\mathcal{T}$ et notons par $(e_t)_{t\in\mathcal{T}}$ la base canonique de Y_{00}, soit $Y = l_1(\mathcal{T})$ la complétion de Y_{00} (équippé de la norme de l_1), l'espace $\mathcal{E}$ est l'adhérence (pour la norme) d'une algèbre convenable et bien choisie dans $\mathcal{L}(Y)$.

On a chaque opérateur de Fredholm borné sur $\mathcal{E}$ a un indice nul. De plus, l'indice de chaque opérateur de Fredholm $T : Y^n \to Y^n$ vaut 0. (Pour plus de détails sur ces espaces, on peut consulter par exemple ([25]).

Par quel critère, la richesse de l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Banach est mesurée ? par abus de language, une riche algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach est liée au fait, par exemple, que l'espace et ses sous-espaces fermés admettent des projections non-triviales, on peut voir les choses d'un autre angle : soit $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ la famille de tous les ensembles compacts non-vides du plan complexe, un espace de Banach riche est un espace pour lequel les deux applications spectre et spectre essentiel de wolf définis par :

$$\begin{aligned}\sigma : \mathcal{L}(X) &\rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ A &\rightarrow \sigma(A)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sigma_e : \mathcal{L}(X) &\rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ A &\rightarrow \sigma_e(A)\end{aligned}$$

sont surjectives. On va prouver que cette propriété est satisfaite si X est un espace de Hilbert. Malheureuseement, ce n'est pas le cas de ces espaces, exotiques, car on va observer que dans ce cas, $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ est remplacé par les ensembles compacts (connexes ou non) d'intérieurs vides dans le cas de l'application

$$\begin{aligned}\sigma_e : \mathcal{L}(X) &\rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C}) \\ A &\rightarrow \sigma_e(A)\end{aligned}$$

3.2 Espaces exotiques et propriétés

Dans ce chapitre, via cette vision, des comparaisons entre les espaces riches et exotiques sont établis.

Définition 3.2.1. Un espace de Banach X est dit finiment décomposable si le nombre maximal de sous-espaces fermés (de dimensions infinies) formant une somme directe dans X est fini. Pour $n \geq 1$, X est HD_n, si ce nombre est égal à n.

Définition 3.2.2. L'espace X est n-quotient décomposable et on écrit $X \in QD_n$ (l'ensemble des espaces de Banach n-quotient décomposables), si le nombre maximal des entiers k tels que X admet un quotient qui est une somme directe de k sous-espaces de dimensions infinies est égal à n.

Soit X un espace de Banach et soit M un sous-espace fermé de dimension infinie de X, supposons que N est un supplémentaire topologique de M dans X, alors N est noté par $X \ominus M$.

Dans ce chapitre, la notion "exotique" d'un espace de Banach qui va être adaptée est donnée dans la définition suivante :

Définition 3.2.3. Soit X un espace de Banach complexe. On dit que X est un espace de Banach exotique si le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X possède un intérieur vide.

Théorème 3.2.1. *Si X est un espace de Banach exotique réflexif alors X^* est lui aussi exotique.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{L}(X^*)$, alors $A^* \in \mathcal{L}(X^{**}) = \mathcal{L}(X)$. Le résultat découle immédiatement du fait que $\lambda I - A \in \Phi^b(X)$ si et seulement si $\lambda I^* - A^* \in \Phi^b(X^*)$.

Remarque 3.2.1. On signale que la propriété que $A \in \Phi(X)$ implique que $A^* \in \Phi(X^*)$ est aussi vraie pour le cas des opérateurs fermés à domaines denses définis sur les espaces réflexifs, car dans ce cas, $D(A)$ est dense dans X entraîne que $D(A^*)$ est dense dans X^*, mieux que ça, on a $A^{**} = A$ (voir par exemple [7], Théorème III. 21, page 46). D'autre part, le fait que A^* est fermé et les relations $\beta(A^*) = \alpha(A)$ et $\alpha(A^*) = \beta(A)$ ([19],Théorème IV.2.3, page 102) complètement la preuve.

Théorème 3.2.2. *Si X est un espace de Banach exotique et Y un sous-espace fermé admettant un supplémentaire topologique dans X, alors Y est un espace exotique.*

Preuve. On suppose l'inverse, c'est à dire, il va exister $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(Y)$ pour lequel $\widehat{\overset{\circ}{\sigma_e(\widetilde{A})}} \neq \emptyset$, donc $A = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(X)$, de plus $\widehat{\overset{\circ}{\sigma_e(A)}} = \widehat{\overset{\circ}{\sigma_e(\widetilde{A})}} = \emptyset$ (car $\sigma_e(\widetilde{A}) = \sigma_e(A)$), ce qui est une contradiction.

Remarque 3.2.2. Les espaces $H.I$, $Q.H.I$, HD_n et QD_n sont des espaces exotiques car les spectres essentiels de Wolf des opérateurs linéaires bornés sur ces espaces sont des ensembles finis.

Une des questions majeures qui peut venir à l'esprit est la suivante : si on a un espace de Banach X tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné est d'intérieur vide, est-il vrai que cet espace est l'un des espaces HD_n, QD_n?

La réponse à cette question est donnée négativement par la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Soit X_s l'espace Shift construit dans [26, 37] (cas analytique), alors pour tout $A \in \mathcal{L}(X_s)$, l'ensemble $\sigma_e(A)$ est un compact connexe d'intérieur vide du plan complexe $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit T le cercle unité dans le plan complexe et Soit $\mathcal{C}(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes sur T. On note par ϕ l'homomorphisme d'algèbres (qui est une projection aussi) : $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ayant son image dans le sous-espace des opérateurs de Toeplitz à coefficients absolument sommables, et définissons $\Psi : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{C}(T)$ comme la composition de ϕ avec la transformée de Fourier. L'opérateur Ψ est continu (mieux que ça elle est analytique du fait qu'on a pris une construction d'un espace Shift analytique). De plus, pour tout $A \in \mathcal{L}(X_s)$; on a $\sigma_+(A)$ est l'ensemble $[\Psi(A)](T)$ ([26] Corollaire 15, page 557), ceci montre que cet ensemble est un compact connexe ayant un intérieur vide du plan complexe $\mathbb{C}$. D'autre part, en tenant compte de la structure des opérateurs de Toeplitz sur l'espace X_s ([26, 37]), il est facile d'observer que le même argument peut être appliqué à l'ensemble $\sigma_-(A)$: ceci implique que $\sigma_e(A)$ est un ensemble compact connexe du plan complexe ayant un intérieur vide.

Remarque 3.2.3. Dans le cas de cet espace de Banach, chaque opérateur linéaire borné s'écrit sous la forme d'un opérateur de Toeplitz plus un opérateur strictement singulier. Signalons que le domaine de Fredholm de l'opérateur Shift à droite $R \in \mathcal{L}(X_s)$ par exemple a exactement deux composantes connexes. En effet, la fonction correspondante à cet opérateur est $\Psi(R)$ définie par $\Psi(R)(\lambda) = \lambda$, donc $\Psi(R)(T) = \sigma_e(R) = T$ et par suite $\phi_R = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| > 1\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| < 1\}$.

Donnons à présent le théorème suivant dans un contexte général.

Théorème 3.2.3. *Soit X un espace de Banach complexe et soit F un sous-espace fermé de X, alors $(X \backslash F + F) \subseteq X \backslash F$ et l'ensemble $X \backslash F$ est un ouvert connexe de X.*

Preuve. Le fait que $(X \backslash F + F) \subseteq X \backslash F$ est trivial. De plus, si $x \in X \backslash F$ alors x et $-x$ peuvent être connectés par le pas $\varphi(t) = e^{it}x$ $(0 \leq t \leq \pi)$. Maintenant, soient $x, y \in X \backslash F$. On suppose que le segment $[x, y]$ ($[x, y] = \{x \in X : x = \lambda a + (1-\lambda)b;\ a, b \in X\}$) intersecte F, en d'autres termes, il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$(1-t)x + ty \in F. \tag{*}$$

Supposons aussi que le segment $[x, -y]$ intersecte F, c'est à dire, il existe $s \in]0, 1[$ tel que

$$(1-s)x - sy \in F.$$

En multipliant par $\frac{t}{s}$, on obtient que

$$\frac{t}{s}(1-s)x - ty \in F. \qquad (^{**})$$

En additionnant (*) (**), on déduit que $((1-t)+\frac{t}{s}(1-s))x \in F$, ce qui est une contradiction car le nombre réel $((1-t)+\frac{t}{s}(1-s))$ est strictement positif. Ceci montre que l'un des segments $[x, y]$ ou $[x, -y]$ doit être contenu dans $X \backslash F$ et par suite x et y peuvent être connectés par un pas, ce qui entraîne le résultat.

Donnons maintenant le lemme fondamantal dû à L.Weis ([57], Corollaire 2.3).

Lemme 3.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe. Alors*
(i) X est un espace de Banach H.I si et seulement si pour tout espace de Banach Y, on a $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{S}(X, Y) \cup \Phi_+^b(X, Y)$;
(ii) X est un espace de Banach Q.H.I si et seulement si pour tout espace de Banach Y, on a $\mathcal{L}(Y, X) = \mathcal{CS}(Y, X) \cup \Phi_-^b(Y, X)$.

Comme conséquence du Théorème 3.2.3 et du Lemme 3.2.1 on a.

Corollaire 3.2.1. *Soit X un espace de Banach complexe. Alors*
(i) Si X est un espace de Banach H.I, alors $\mathcal{L}(X) = \mathbb{C}I_X \bigoplus \mathcal{S}(X)$;
(ii) Si X est un espace de Banach Q.H.I, alors $\mathcal{L}(X) = \mathbb{C}I_X \bigoplus \mathcal{CS}(X)$.

Preuve. En tenant compte du Lemme 3.2.1 on a $\mathcal{L}(X) = \Phi_+^b(X) \cup \mathcal{S}(X)$ si X est un espace de Banach H.I et $\mathcal{L}(X) = \Phi_-^b(X) \cup \mathcal{CS}(X)$ si X est un espace de Banach Q.H.I. D'autre part, il est bien connu que les ensembles $\Phi_+^b(X)$ et $\Phi_-^b(X)$ sont ouverts ([40], Téorème 11, page 158). Le Théorème 3.2.3 appliqué aux ensembles $S(X)$, $\Phi_+^b(X)$ et $CS(X)$; $\Phi_-^b(X)$ montre que les classes $\Phi_+^b(X)$ et $\Phi_-^b(X)$ sont connexes dans $\mathcal{L}(X)$; maintenant en tenant compte du fait que $I_d \in \Phi_+^b(X) \cap \Phi_-^b(X)$ et la stabilité de l'indice sur les composantes connexes, on obtient que $\Phi_+^b(X) = \Phi_0^b(X)$ pour le cas des espaces H.I et $\Phi_-^b(X) = \Phi_0^b(X)$ pour le cas

des espaces Q.H.I. Maintenant le résultat découle immédiatement du théorème de Gelfand-Mazur (car les opérateurs de Fredholm dans $\mathcal{L}(X)$; ne sont autres que les représentants des éléments inversibles dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)/\mathcal{S}(X)$).
Introduire la proposition.

Proposition 3.2.2. *Soit X un espace de Banach complexe.*
(i) Si X est un espace de Banach H.I, alors $\partial\left(\Phi^b(X)\right) = \mathcal{S}(X)$;
(ii) Si X est un espace de Banach Q.H.I, alors $\partial\left(\Phi^b(X)\right) = \mathcal{CS}(X)$.

(Ici ∂ désigne le symbole de la frontière d'un ensemble).
Preuve. Première méthode on va restreindre notre preuve au cas des espaces H.I, le cas des espaces Q.H.I se traite de la même manière. Soit $A \in \partial\left(\Phi^b(X)\right)$, alors $A \notin \Phi^b_+(X)$ ([40], Lemme 1, page 169), ceci prouve que $A \in \mathcal{S}(X)$ et par suite $\partial\left(\Phi^b(X)\right) \subseteq \mathcal{S}(X)$. D'autre part, soit $S \in \mathcal{S}(X)$ et soit $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de nombres complexes tendant vers 0, alors la suite des opérateurs $\lambda_n I + S$ est dans $\Phi^b(X)$ et converge en norme vers S, ceci implique que $S \in \partial\left(\Phi^b(X)\right)$ et entraîne que $\mathcal{S}(X) \subseteq \partial\left(\Phi^b(X)\right)$; ce qui termine la preuve.
Deuxième méthode il suffit de prouver que $\Phi^b(X)$ est dense dans $\mathcal{L}(X)$. En effet, soit S un opérateur strictement singulier sur un espace de Banach H.I, alors S est la limite (pour la topologie en norme) de la suite des opérateurs de Fredholm bornés $S_n{=}\lambda_n I + S$, ceci donne le résultat pour les espaces de Banach H.I, le cas des espaces de Banach Q.H.I peut être établi par les mêmes arguments.

Remarque 3.2.4. [46] On signale qu'en général dans les espaces de Banach, la frontière des opérateurs de Fredholm $\partial\left(\Phi^b(X)\right)$ ne coïncide pas nécessairement avec l'ensemble des opérateurs de Riesz. En effet, il suffit de montrer que ce dernier ensemble est non fermé par exemple. Pour cela, donnons juste le célèbre exemple dû à Kakutani ([46], page 282). Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(h_m)_{m=1}^{+\infty}$ sa base canonique. Soit $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite de nombres réels positifs donnée par $\alpha_n = e^{-k}$ pour $n = 2^k(2l+1)(k,l = 0,1,...)$ et l'opérateur A est donné par $Ah_n = \alpha_n h_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Donc $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$, $A^p h_n = \alpha_n\alpha_{n+1}...\alpha_{n+p-1}h_{n+p}$ et par suite $\|A^p\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n\alpha_{n+1}...\alpha_{n+p-1})$. On peut observer que $\alpha_1...\alpha_{2^s-1} = \prod_{j=1}^{s-1} e^{-j2^{s-j-1}}$, alors $(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{2^s-1})^{\frac{1}{2^s-1}} > (\prod_{j=1}^{s-1} e^{\frac{-j}{2^{j+1}}})^2$ et si $\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^{j+1}}$, donc $e^{-2\lambda} \leq r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$, ce qui implique que A n'est pas quasinilpotent.

Maintenant, on définit l'opérateur A_p par

$$A_p h_n = \begin{cases} 0, \ n = 2^p (2l+1), \ l = 0, 1, ... \\ \\ \alpha_n h_{n+1} \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Donc A_p est nilpotent et de plus

$$(A - A_p) h_n = \begin{cases} e^{-p} h_{n+1}, \ n = 2^p (2l+1), \ l = 0, 1, ... \\ \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Alors $\|A_p - A\| = e^{-p} \to 0 \quad (p \to +\infty)$ et par suite $A_p \to A$ en norme d'opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dautre part, il est facile de montrer que le spectre ponctuel de A est vide, le fait que $r_\sigma(A) \geq e^{-2\lambda}$ implique l'existence d'un scalaire non nul β tel que $\beta \in \sigma_\omega(A)$, c'est à dire $\sigma_\omega(A) \neq \{0\}$, ceci entraîne que A n'est pas un opérateur de Riesz. Pour plus de détails concernant la frontière des opérateurs de Fredholm et semi-Fredholm bornés, on peut se reférer à [51].

Signalons aussi le fait important que dans ([10], page 45) (voir aussi [1]), il a été donné un exemple d'un opérateur affirmant que l'espace de Banach H.I construit par T. Gowers et B. Maurey X_{GM} n'est pas simple, en d'autrs termes, la classe des opérateurs compacts n'est pas l'unique idéal bilatère fermé (non trivial) dans $\mathcal{L}(X_{GM})$.

Théorème 3.2.4. *Soit X un espace de Banach complexe. Alors*
(i) Si X est un espace de Banach H.I et A: $X \to X$ un opérateur fermé à domaine dense semi-Fredholm supérieur sur X, alors l'espace de Banach $X_A = (D(A), \ \|.\|_A)$ est un espace de Banach H.I.
(ii) Si X est un espace de Banach Q.H.I et $A : X \to X$ un opérateur fermé à domaine dense semi-Fredholm inférieur sur X, alors l'espace de Banach $X_A = (D(A), \ \|.\|_A)$ est un espace de Banach Q.H.I.

Preuve. On va prouver juste la première assertion, la seconde peut s'établir par les mêmes techniques. Soit $A \in \Phi_+(X)$, alors $\widehat{A} \in \Phi_+^b(X_A, X)$, donc $X_A = X_1 \bigoplus X_2$ où X_1 est dimension finie et X_2 est isomorphe à $R(\widehat{A})$, d'autre part, comme $R(A) = R(\widehat{A})$ est un sous espace fermé de dimension infinie d'un espace H.I, donc $R(\widehat{A})$ est aussi un espace de Banach H.I, et par suite X_A est un espace H.I.

On présente ici un résultat caractérisant les classes de perturbations semi-Fredholm pour le cas des espaces exotiques.

Théorème 3.2.5. *([11], Proposition 3.11) Soit X un espace de Banach exotique, alors* $\mathcal{F}_+^b(X) = \mathcal{F}_-^b(X) = \mathcal{F}^b(X) = \mathcal{F}(X)$.

Remarque 3.2.5. Comme il a été mentionné dans [11], les ensembles $\mathcal{F}_+(X)$ et $\mathcal{F}_-(X)$ sont des ensembles fermés, de plus, on a juste les inclusions $\mathcal{F}_+(X) \subseteq \mathcal{F}_+^b(X)$ et $\mathcal{F}_-(X) \subseteq \mathcal{F}_-^b(X)$.

Ici, on va donner une construction générale d'espaces de Banach Z, Z' pour lesquels $\mathcal{F}_+^b(Z) \neq \mathcal{S}(Z)$ et $\mathcal{F}_-^b(Z') \neq C\mathcal{S}(Z')$.

Proposition 3.2.3. *Soit Z un espace de Banach exotique pour lequel il existe un sous-espace fermé Y admettant un supplémentaire topologique dans Z tels que Y et $Z \ominus Y$, sont essentiellement incomparables et Y isomorphe à un sous-espace fermé de $Z \ominus Y$, alors $\mathcal{F}_+^b(Z) \neq \mathcal{S}(Z)$, de plus si Z est réflexif, alors $\mathcal{F}_-^b(Z^*) \neq C\mathcal{S}(Z^*)$.*

Preuve. On suppose que Y et $Z \ominus Y$ sont essentiellement incomparables, alors $\mathcal{L}(Y, Z \ominus Y) = \mathcal{F}^b(Y, Z \ominus Y)$. D'autre part, il existe un isomorphisme $J : Y \to Z \ominus Y$, donc, il est clair que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^b(Z) = \mathcal{F}_+^b(Z) \text{ mais } A \notin \mathcal{S}(Z).$$

Maintenant si Z est réflexif, alors il est facile d'observer que si Y et $Z \ominus Y$ sont essentiellement incomparables, donc Y^* et $(Z \ominus Y)^*$ sont essentiellement incomparables. D'autre part, $A \in \mathcal{F}^b(Y, Z \ominus Y)$ si et seulement si $A^* \in \mathcal{F}^b((Z \ominus Y)^*, Y^*)$. Par le Théorème 3.2.1, Z* est exotique, on peut aussi voir que $J^* : (Z \ominus Y)^* \to Y^*$ n'est pas strictement cosingulier, de plus, on a $\mathcal{F}_-^b(Z^*) = \mathcal{F}^b(Z^*) = \left[\mathcal{F}^b(Z)\right]^*$, ceci montre que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ J^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_-^b(Z^*)$ mais $B \notin C\mathcal{S}(Z^*)$.

Définition 3.2.4. Un espace de Banach X est dit faiblement compact engendré s'il existe un sous-ensemble faiblement compact K de X tel que le sous-espace fermé engendré par K, $[K]$, est tout X.

Proposition 3.2.4. *Les espaces de Banach réflexifs et séparables sont faiblement compacts engendrés.*

Preuve. Pour le cas des espaces de Banach réflexifs, on prend $K = B_X$ (la boule unité fermée de X) tandis que pour le cas des espaces de Banach séparables, on peut prendre $K = \left\{ \frac{x_n}{n\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{+\infty} \bigcup \{0\}$ où $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ est dense dans X.

Remarque 3.2.6. Rappelons que les espaces H.I faiblement compacts engendrés sont nécessairement séparables. En effet, si ce n'était pas le cas, alors X doit être décomposable [12], ce qui est une contradiction. Un bon exemple d'un espace faiblement compact engendré héréditairement indécomposable est l'espace X_{GM} qui est réflexif donc séparable.

Proposition 3.2.5. *Soit X un espace de Banach tel que pour chaque opérateur semi-Fredholm supérieur (resp. inférieur) $T \in \mathcal{L}(X)$, l'ensemble φ_{+T} (resp. φ_{-T}) est connexe, alors T est de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. Le résultat découle du fait que l'ensemble φ_{+T} (resp. φ_{-T}) contient 0 et l'ensemble résolvant de T. La stabilité de l'indice sur les composantes connexes donne le résultat.

Corollaire 3.2.2. *Soit X un espace de Banach exotique tel que pour chaque opérateur semi-Fredholm supérieur (resp. inférieur) $T \in \mathcal{L}(X)$, l'ensemble φ_T est connexe, alors T est de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. Ceci est une conséquence immédiate de la Proposition 3.2.5 car $\sigma_e(T) = \sigma_+(T) = \sigma_-(T)\ \forall\ T \in \mathcal{L}(X)$.

On note par $\mathcal{A}$ la classe des espaces de Banach pour lesquels chaque opérateur de Fredholm est d'indice nul.

Remarque 3.2.7. Il est facile de constater que $\mathcal{A}$ contient les espaces de Banach $H.I$, $Q.H.I$, HD_n et QD_n.

Proposition 3.2.6. *Soient X et Y deux espaces de Banach essentiellement incomparables de $\mathcal{A}$, alors $X \bigoplus Y \in \mathcal{A}$.*

Preuve. On suppose que $T \in \mathcal{L}\left(X \bigoplus Y\right)$, alors T peut être mis sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{L}(X)$, $D \in \mathcal{L}(Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, X)$, $C \in \mathcal{L}(X, Y)$, d'autre part, il est facile de voir que $T \in \Phi^b\left(X \bigoplus Y\right)$ si et seulement si $A \in \Phi^b(X)$ et $B \in \Phi^b(Y)$ et $i(T) = i(A) + i(B)$ (voir [22]), ceci complète la preuve.

Proposition 3.2.7. *Soit X un espace de Banach exotique tel que $X \in \mathcal{A}$, alors X ne peut pas être isomorphe à chacun de ses sous-espaces propres.*

Preuve. On suppose qu'il existe un sous-espace fermé Y de X tel que $S : X \to Y$ soit un isomorphisme, alors $S \in \Phi^b_+(X) = \Phi^b_-(X) = \Phi^b(X)$ et entraîne que $S \in \Phi^b_0(X)$ ce qui est une contradiction car Y est propre de X.

Le théorème suivant est crucial.

Théorème 3.2.6. *Soit X un espace de Hilbert séparable et on se donne un ensemble K compact non vide du plan $\mathbb{C}$, alors il existe un opérateur linéaire borné sur X tel que $\sigma(A) = K$.*

Preuve. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $X = l^2$, soit $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ une base orthonormée de X et $(\lambda_n)_{n=1}^{+\infty}$ une suite dense dans K. Définissons A comme suit :

$$A\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \alpha_n e_n \text{ où } (\alpha_n)_{n=1}^{+\infty} \in l^2.$$

Il est clair que $\sigma(A)$ contient K. Maintenant, on va prouver l'inclusion opposée, si $\lambda \notin K$, alors $inf\{|\lambda - \beta|; \beta \in K\} > 0$ et donc $S\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} \alpha_n e_n$ est un opérateur linéaire borné sur X et

$$(\lambda I_d - A) S = S(\lambda I_d - A) = I_d.$$

Ceci montre que $\lambda \notin \sigma(A)$ et complète la preuve.

3.3 Spectre et spectre essentiel de Wolf des opérateurs dans le cas des espaces exotiques

Commençons cette étude par la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit X un espace de Banach tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X ne contient la frontière d'aucun ouvert non vide du plan complexe, alors X est un espace exotique.*

Preuve. En effet, dans ce cas, le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X possède nécessairement un intérieur vide.
Notons que la réciproque de la Proposition 3.3.1 est en général fausse (voir l'exemple de l'espace Shift analytique).

Proposition 3.3.2. *Soit X un espace de Banach tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X ne contient la frontière d'aucun ouvert non vide du plan complexe, alors l'image de l'application $\sigma : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{K}(\mathbb{C})$ est inclue dans la famille de tous les ensembles compacts d'intérieurs vides du plan complexe.*

Preuve. On se donne $A \in \mathcal{L}(X)$. Tout d'abord, on va prouver que $\overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} \setminus \sigma_e(A)$ est vide. Pour le faire, on suppose que $\overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} \setminus \sigma_e(A) \neq \emptyset$, soit Ω une composante connexe de cet ensemble et soit $\lambda \in \partial\Omega$; ceci donne que $\lambda \in \partial\sigma(A)$. Ensuite, posons $S_\lambda = A - \lambda I$; comme $\lambda \notin \sigma_e(A)$, l'opérateur S_λ est de Fredholm d'indice nul. En effet, le fait que $0 \in \partial\sigma(S_\lambda)$ affirme l'existence des opérateurs inversibles convergeant (en norme) vers S_λ, l'assertion découle de la continuité de l'indice. Donc 0 est un point isolé de l'ensemble $\sigma(S_\lambda)$. En effet, comme $S_\lambda \in \Phi_0^b(X)$, alors $Ker(S_\lambda) \neq \{0\}$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha(S_\lambda)$ est constant sur l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \,/ 0 < |\lambda| < \varepsilon\}$. Comme $0 \in \partial\sigma(S_\lambda)$, $\alpha(S_\lambda)$ doit être 0; maintenant, on peut supposer que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit de telle façon que S_λ va être un opérateur de Fredholm d'indice nul pour $0 < |\lambda| < \varepsilon$. Ceci implique que S_λ est inversible pour $0 < |\lambda| < \varepsilon$ et montre que 0 est un point isolé de l'ensemble $\sigma(S_\lambda)$ et par suite λ est un point isolé de $\sigma(A)$ ce qui contredit le fait que $\lambda \in \overline{\Omega}$. Cet argument implique que $\partial\Omega \subseteq \sigma_e(A)$, c'est une contradiction. Alors l'ensemble $\overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} \setminus \sigma_e(A)$ doit être vide et par suite, on obtient $\overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{\sigma_e(A)}}$. L'utilisation de la Proposition 3.3.1, complète la preuve.

Proposition 3.3.3. *Soit X un espace de Banach tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X ne contient la frontière d'aucun ouvert non vide du plan complexe, alors pour tout $A \in \mathcal{L}(X)$, on a $\sigma(A) = \sigma_e(A) \cup \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies de A.*

Preuve. Si $\lambda \in \partial\sigma(A) = \sigma(A) \setminus \overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} = \sigma(A)$ (car $\overset{\circ}{\widehat{\sigma(A)}} = \emptyset$), alors $S = \lambda I - A \in \Phi_0^b(X)$. Comme dans la preuve de la Proposition 3.3.2, on déduit que λ est un valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de A.

Proposition 3.3.4. *Soit X un espace de Banach tel que le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné sur X ne contient la frontière d'aucun ouvert non vide du plan complexe $\mathbb{C}$ et si $A \in \mathcal{C}(X)$ (non borné) tel que $\rho(A) \neq \emptyset$, alors $0 \in \sigma_e\left[(\lambda - A)^{-1}\right]$ $\forall \lambda \in \rho(A)$.*

Preuve. Par la Proposition 3.3.3, si $\lambda \in \rho(A)$, on a $\sigma(\lambda - A)^{-1} = \sigma_e(\lambda - A)^{-1} \cup \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies, d'autre part, le fait que A est non borné montre que $D(A) \neq X$. Maintenant soit $\mu \in \rho(A)$, il est clair que $0 \in \sigma(\mu - A)^{-1}$ et supposons que 0 est une valeur propre de multiplicité algébrique finie de l'operateur inversible $(\mu - A)^{-1}$, ceci est impossible, donc on a nécessairement $0 \in \sigma_e(\mu - A)^{-1}$, ce qui donne le résultat.

Maintenant, donnons la définition d'un C_0-semigroupe défini sur un espace de Banach X.

Définition 3.3.1. Soit X un espace de Banach complexe. On appelle C_0-semigroupe sur X toute famille $(T(t); t \geq 0)$ d'opérateurs linéaires bornés sur X tels que

(i) $T(t + s) = T(t)T(s)$ pour tout $s, t \in [0, +\infty[$;

(ii) $T(0) = I_d$, I_d est l'opérateur d'identité sur X;

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} \|T(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in X$.

Le générateur A du semigroupe $(T(t); t \geq 0)$ est l'opérateur défini sur le domaine

$$D(A) = \left\{ x \in X, \text{ tel que } \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A).$$

Remarque 3.3.1. Le semigroupe $(T(t); t \geq 0)$ admet un unique générateur sur X.

Corollaire 3.3.1. *Soit X un espace de Banach H.I (resp. Q.H.I) et soit $A \in \mathcal{C}(X)$ (non borné) tel que A engendre un C_0-semigroupe sur X, alors on a nécessairement $(\lambda - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné strictement singulier sur X (resp. $(\lambda - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné strictement cosingulier sur X) pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Preuve. Ceci est une conséquence immédiate de la Proposition 3.3.4 car le spectre essentiel de Wolf de chaque opérateur linéaire borné ici est un singleton.

Proposition 3.3.5. *Sous les hypothèses du Corollaire 3.3.1, on a $\sigma_\omega(A) = \emptyset$, en particulier, on a A est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Preuve. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on écrit

$$\lambda I - A = \left(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right)(\lambda_0 I - A).$$

Le corollaire 3.3.1 affirme que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur strictement singulier si X est un espace H.I et strictement cosingulier si X est Q.H.I, il s'ensuit que

$$ind\left(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}\right) = ind(I) = 0.$$

D'autre part

$$ind(\lambda_0 I - A) = 0.$$

En utilisant le théorème d'Atkinson, on obtient que $ind(\lambda I - A) = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en particulier si $\lambda = 0$, on déduit que A est de Fredholm d'indice nul.

Théorème 3.3.1. *Soit X un espace de Banach H.I ou Q.H.I et soit $A \in \mathcal{C}(X)$, alors, on a les trois alternatives suivantes :*

(i) A est borné ;

(ii) $\sigma(A) = \mathbb{C}$;

(iii) $(\lambda I - A)^{-1}$ *est strictement singulier si* X *est H.I et strictement cosingulier si* X *est Q.H.I.*

Preuve. Si A est non borné et $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, alors il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$, le Corollaire 3.3.1 montre que nécessairement, on a $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est strictement singulier si X est H.I et strictement cosingulier si X est Q.H.I, ce qui donne le résultat.

Exemple (voir [44]) Soit X un espace de Banach H.I ayant une base de Schauder, par exemple l'espace X_{GM} construit par T. Gowers et B. Maurey (voir [25]) qui est réflexif ayant une base de Schauder (non inconditionnelle). Pour $x \in X$, on écrit $x = (x_1, x_2, ...)$ (par rapport à cette base). On définit le sous-espace $D(S) = \{x \in X : (0, x_1, 0, x_3, ...) \in X\}$ et $S : D(S) \to X$ par $S(x) = (0, x_1, 0, x_3, ...)$. Comme chaque élément $x \in X$ ayant un support fini appartient à $D(S)$, alors $D(S)$ est dense dans X. D'autre part, en utilisant la continuité des coordonnées (fonctionnelles) dans X, il est facile de déduire que S est fermé (non borné), donc $S \in \mathcal{C}(X)$. Pour voir que le spectre de S coïncide avec $\mathbb{C}$, il suffit de montrer que S n'est pas de Fredholm, en effet, il est facile de voir que l'équation $S(x) = 0$ a une infinité de solutions.

Corollaire 3.3.2. *Soit* X *un espace de Banach H.I ou bien Q.H.I, alors l'application* $\sigma : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{K}(\mathbb{C})$ *n'est pas surjective, plus précisément son image est incluse dans la famille de toutes les suites convergentes du plan* $\mathbb{C}$.

Preuve. Ceci résulte du fait que le spectre de chaque opérateur strictement singulier ou strictement cosingulier satisfait la théorie de Riesz-Schauder.

Proposition 3.3.6. *Soit* X *un espace de Banach complexe et soit* $A \in \mathcal{L}(X)$ *pour lequel* $\sigma_c(A) = \sigma(A)$, *alors* $\sigma_e(A) = \sigma_\omega(A) = \sigma(A)$.

Preuve. Comme $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_\omega(A) \subseteq \sigma(A)$, il s'ensuit que $\sigma_c(A) = \sigma_\omega(A) = \sigma(A)$. Ensuite, si $\lambda \in \sigma_\omega(A)$ avec $\lambda \notin \sigma_e(A)$, alors $\lambda I - A \in \Phi^b(X)$, donc $R(\lambda I - A)$ est fermé dans X, ce qui est une contradiction, l'inclusion $\sigma_e(A) \subseteq \sigma_\omega(A)$ complète la preuve.

Théorème 3.3.2. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert séparable et* K *un ensemble compact non-vide du plan* $\mathbb{C}$, *alors il existe* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tel que* $\sigma_e(A) = K$.

Preuve. Le résultat est annoncé dans [41] sans preuve. Donnons par exemple la preuve dans les deux cas du cercle et du disque unité dans $\mathbb{C}$. Prenons $K = \overline{D}(0,1)$ muni de la mesure de lebesgue ν sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{H} = L_2\left(\overline{D}(0,1)\right)$. Définissons A sur $\mathcal{H}$ par :

$$(Af)(\lambda) = \lambda f(\lambda)\,;\lambda \in \overline{D}(0,1)\,, f \in \mathcal{H}.$$

Si $\lambda \notin \overline{D}(0,1)$, alors $\sup\left\{|\lambda-\alpha|^{-1};\alpha \in \overline{D}(0,1)\right\} < \infty$ et donc on peut définir l'opérateur B sur $\mathcal{H}$ par :

$$(Bf)(\alpha) = (\lambda-\alpha)^{-1} f(\alpha)\,; f \in \mathcal{H}.$$

Alors

$$B(\lambda I - A) = (\lambda I - A)B = I_d,$$

ce qui prouve que $\lambda \notin \sigma(A)$.

Maintenant si $\lambda \in \overline{D}(0,1)$ et $\lambda \notin \sigma(A)$, donc $\lambda \in \rho(A)$ et $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit f_ε la fonction caractéristique de l'ensemble $\{\alpha;\ \ |\lambda-\alpha| < \varepsilon\}$ multipliée par $(\nu\{\alpha;\ \ |\lambda-\alpha|<\varepsilon\})^{\frac{-1}{2}}$, alors

$$1 = \|f_\varepsilon\|_2 \leq \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \|(\lambda I - A) f_\varepsilon\|$$

$$= \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \left(\int\limits_{\overline{D}(0,1)} |(\lambda-\alpha) f_\varepsilon(\alpha)|^2 \, d\nu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \varepsilon.$$

Si $\varepsilon \to 0$, on obtient une contradiction, alors λ doit appartenir à $\sigma(A)$ et donc, il s'ensuit que $\sigma(A) = K$. De plus, si $Af = \theta f$ $(\theta \in \mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda \in \overline{D}(0,1)$, $\lambda f(\lambda) = \theta f(\lambda)$, ce qui entraîne que $f = 0$ $p.p$ donc A n'admet pas des valeurs propres. D'autre part, pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $(\lambda I - A)$ n'est pas surjective car $\beta(\alpha-\lambda)^{-1} \notin L_2\left(\overline{D}(0,1)\right)$ pour $\beta \neq 0$, ceci montre que les fonctions constantes β (non nulles) n'appartiennent pas à l'image de l'opérateur $(\lambda I - A)$ qui est un ensemble dense. En effet, pour tout

$f \in L_2\left(\overline{D}(0,1)\right)$, soit $f_n(z) = \begin{cases} f(z) \text{ si } |z-\lambda| \geq \frac{1}{n}, \\ \\ 0 \text{ si } |z-\lambda| < \frac{1}{n}. \end{cases}$

Donc $f_n \to f$ dans $L_2\left(\overline{D}(0,1)\right)$, ceci implique que $R(\lambda I - A)$ est dense et par suite $\overline{D}(0,1) = \sigma(A) = \sigma_c(A)$. Finallement, le résultat se déduit de la Proposition 3.3.6.

Si $K = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infine ayant une base orthonormée $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour tout $x \in H$, on définit $(U(x))_n = x_{n-1}$. Il est facile de voir que $\sigma(U) = \sigma_c(U) = \sigma_e(U) = K$.

Signalons que l'idée donnée dans le Théorème 3.3.2 peut être appliquée aussi dans le cas des espaces de Banach $C([0,1])$. En effet, soit $K_1 = [0,1] \times [0,1]$ et soit K_2 le cercle unité dans le plan complexe.

On note par f_1 la fonction continue de Peano (non différentiable partout) définie sur l'intervalle $[0,1]$ et qui remplit le carré K_1 et f_2 la paramétrisation du cercle unité définie sur $[0,1]$.
On note par A_1 et A_2 les opérateurs bornés suivants définis sur $C([0,1])$

$$\begin{cases} A_1 : C([0,1]) \to C([0,1]), \\ \\ \qquad g \to f_1 g. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_2 : C([0,1]) \to C([0,1]), \\ \\ \qquad g \to f_2 g. \end{cases}$$

Il est facile donc de voir que $\sigma(A_1) = K_1$ et $\sigma(A_2) = K_2$.

Quelques questions ouvertes et problèmes d'actualité

Complétons nos études et analyses par une série de questions ouvertes qui suscite toujours la curiosité des spécialistes jusqu'à nos jours.

Question 1 : Soit X un espace de Banach complexe et soit $\mathcal{I}(X)$ la famille des idéaux bilatères fermés dans $\mathcal{L}(X)$ définie par

$\mathcal{I}(X) = \{J$ tel que pour tout $T \in J$, T satisfait la décomposition de West$\}$.

Observons que $\mathcal{I}(X)$ n'est pas vide car elle contient au moins l'idéal des opérateurs compacts. Peut-on dire que l'idéal des perturbations de Fredholm n'est autre que l'élément maximal (pour l'inclusion) de $\mathcal{I}(X)$?

Question 2 : Est-il vrai que sur l'espace $X_{GM}(H.I)$ construit par T. Gowers et B. Maurey, on peut construire un opérateur strictement singulier n'admettant aucune puissance compacte ? Quelle est son expression si la réponse est positive ?

Question 3 : Est-il vrai que les opérateurs strictement singuliers sur les espaces H.I admettent la décomposition de West ?

On note que dans le cas de l'espace de Tsirelson, le résultat a été établi par [60] moyennant les mêmes techniques de [9].

Question 4 : Est-il vrai que les opérateurs de Riesz sur l'espace $L_1([0,1])$ satisfont la décomposition de West ou de Smyth ?

Signalons qu'ici la classe des perturbations de Fredholm n'est autre que l'idéal des opérateurs faiblement compacts (voir [43]).

Question 5 : Soit X un espace de Banach, on dit que $T \in \mathcal{L}(X)$ satisfait le problème de Salinas s'il existe un opérateur compact K tel que $\sigma_\omega(T) = \sigma(T+K)$ [2]. Il est facile d'observer que si cette propriété est satisfaite pour chaque opérateur linéaire borné sur X, alors chaque opérateur de Riesz admet la décompostion de West, le problème si la seconde propriété implique ou non la première est ouvert, rappelons qu'elles sont toutes les deux satisfaites sur les espaces l_p $(1 \leq p < \infty)$.

Aussi, remarquons que sur le fameux espace d'Argyros-Haydon pour lequel l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ [4], ces deux propriétés sont satisfaites.

Question 6 : Quelle est la structure des espaces de Banach pour lesquels, les deux applications spectre et spectre essentiel de Wolf sont toutes les deux surjectives ?

Question 7 : Peut-on construire un espace de Banach X pour lequel chaque opérateur borné s'écrit sous la forme $\lambda I + K$ où K est une limite uniforme d'opérateurs de rangs finis. Signalons que sur un espace de Banach quelconque, on peut toujours construire des opérateurs de rangs finis.

Question 8 : Sachant que sur les espaces l_p $(1 \leq p < \infty) \cup c_0$, $S(X) = \mathcal{F}^b(X) = \mathcal{K}(X)$, et sur les espaces L_p $(1 \leq p < \infty)$, $\mathcal{F}^b(X) = S(X)$ avec $\mathcal{F}^b(X)\mathcal{F}^b(X) = S(X)S(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$. Peut-on trouver un espace de Banach X tel qu'il existe $n > 2$ pour lequel $\forall F \in \mathcal{F}^b(X) \backslash \mathcal{K}(X)$, on a $F^n \in \mathcal{K}(X)$?

Question 9 : Existe t-il un lien entre la décomposition de West des opérateurs de Riesz sur les espaces de Banach et la contractibilité du groupe des opérateurs inversibles sur ces espaces (voir [39]) ?

Bibliographie

[1] G. Androulakis and Th. Schlumprecht, *Strictly singular, non-compact operators exist on the space of Gowers and Maurey*, J. London. Math. Soc. **64** (3) (2001), 655-674.

[2] C. Apostol, *The correction by compact perturbation of the singular behavior of operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **21** (2) (1976), 155-175.

[3] S.A. Argyros, *Universal property of reflexive hereditarily indecomposable Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (11) (2001), 3231-3239.

[4] S.A. Argyros, *The solution of the scalar-plus compact problem,* séminaire d'initiation à l'analyse. Université paris-jussieu. Décembre 2008.

[5] S.A. Argyros and V. Felouzis, *Interpolating Hereditarily indecomposable Banach spaces*, J. Amer. Math. soc. **13** (2) (2000), 243-294.

[6] C. Bessaga and A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Stud. Math. **17** (1958), 151-164.

[7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, 1983.

[8] S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger and B. Yood, *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1974.

[9] K.R. Davidson and D.A. Herrero, *Decomposition of Banach space operators*, Indiana. Univ. Math. Journal. **35** (2) (1986), 333-343.

[10] A. Dehici and N. Boussetila, *Properties of polynomially Riesz operators on some Banach spaces*, Lobachevskii Journal of Mathematics. **32** (1) (2011), 39-47.

[11] A. Dehici and K. Saoudi, *Some remarks on perturbations classes of semi-Fredholm and Fredholm perturbations*, Int. J. Math. Math. Sci, (2007), ID 26254.

[12] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces*, Selected Topics. Lecture notes in Mathematics 485 Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1975.

[13] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 192-197.

[14] P. Enflo, *A counter example to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309-317.

[15] V. Ferenczi, *Hereditarily finitely decomposable Banach spaces*, Stud. Math. **123** (2) (1997), 135-149.

[16] V. Ferenczi, *Operators on subspaces of Hereditarily indecomposable Banach spaces*, Bull. Lond. Math. Soc. **29** (1997), 338-344.

[17] V. Ferenczi, *Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces*, Can. J. Math. **51** (3) (1999), 566-584.

[18] C. Foias and C. Pearcy, *A model for quasinilpotent operators*, Michigan Math. J. **21** (1974), 399-404.

[19] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[20] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Fundamental theorems on deficiency numbers, root numbers and indices of linear operators*, in Amer. Math. Soc. Tran. Ser. **13** (2) (1960), 185-264.

[21] I.C. Gohberg, A. Markus and I.A. Feldman, *Normally solvable operators and ideals associated with them*, Amer. Math. Soc. Tran. Ser. **61** (2) (1967), 63-84.

[22] M. Gonzalez, *On essentially incomparable Banach spaces*, Math. Z. **215** (1994), 621-629.

[23] M. Gonzalez, *The perturbation classes problem in Fredholm theory*, J. Func. Ana. **200** (2003), 65-70.

[24] T.W. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Func. Anal. **6** (6) (1996), 1083-1093.

[25] T.W. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851-874.

[26] T.W. Gowers and B. Maurey, *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. **307** (1997), 543-568.

[27] B. Gramsch and D. Lay, *Spectral mapping theorems for essential spectra*, Math. Ann. **192** (1971), 17-32.

[28] K. Gustafson and J. Weidmann, *On the essential spectrum*, J. Math. Anal. Appl. **25** (1969), 121-127.

[29] Y.M. Han, S.H. Lee and W.Y. Lee, *On the structure of polynomially compact operators*, Math. Z. **232** (1999), 257-263.

[30] T. Kato, *Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math. **6** (1958), 261-322.

[31] J. J. Koliha and P. W. Poon, *On West and Stampfli decomposition of operators*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **63** (1997), 181-194.

[32] R. A. Komorowski and N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces without local unconditional structure*, Israel J. Math. **89** (1-3) (1995), 205–226.

[33] K. Latrach and A. Dehici, *Fredholm, Semi-Fredholm Perturbations, and Essential Spectra,* J. Math. Anal. Appl. **259** (1) (2001), 277-301.

[34] C. Laurie and H. Radjavi, *On the West Decomposition of Riesz Operators,* Bull. London Math. Soc. **12** (2) (1980), 130-132.

[35] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces,* vol 1, Springer-Verlag, 1977.

[36] V.I. Lomonosov, *Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator,* J. Func. Anal. Appl. **7** (1973), 213-214.

[37] B. Maurey, *Operators theory and exotic Banach spaces*, Series of lectures, Université Paris 6, 1995.

[38] V. Milman, *Some properties of strictly singular operators*, J. Func. Anal. Appl. **3** (1969), 77-78.

[39] B. S. Mityagin, *The homotopy structure of the linear group of a Banach space*,Uspekhi Mat. Nauk. **25** (5) (155) (1970), 63–106.

[40] V. Müller, *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebra*, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2007.

[41] G. J. Murphy, *Lifting sets and the Calkin algebra*, Glasgow Math. J. **23** (1982), 83-84.

[42] C. Pearcy, *Some recent developments in operator theory*, CBMS 36, Providence : AMS, 1978.

[43] A. Pelczynski, *Strictly singular and strictly cosingular operators*, Bull. Acad. Polon. Sci. **13** (1965), 31-41.

[44] F. Räbiger and W. J. Ricker, *Aspects of operator theory in heriditarily indecomposable Banach spaces*, Universität Tübingen-University of New South Wales, Conferenza tenuta il 16 septembre, 1997.

[45] C. Read, *Strictly singular operators and the invariant subspace problem*, Studia Mathematica. **132** (3) (1999), 203-226.

[46] C.E. Rickart, *General theory of Banach algebra*, Princeton, Van Nostrand, 1960.

[47] M. Schechter, *Riesz operators and Fredholm perturbations*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1139-1144.

[48] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1971. Second Edition 1986.

[49] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 36, Amer. Math. Soc, 2001.

[50] Th. Schlumprecht, *An arbitrary distortable Banach space*, Israel J. Math. **76** (1-2) (1991), 81-95.

[51] H. Skhiri, *On the topological boundary of semi-Fredholm operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (5) (1998), 1381-1389.

[52] M.R.F. Smyth, *Riesz theory in Banach algebras*, Mathematische Zeitschrift. **145** (2) (1975), 144-155.

[53] J. Stampfli, *Compact perturbations, Normal eigenvalues and A problem of Salinas*, J. London. Math. Soc. **2** (9) (1974), 165-175.

[54] J.I. Vladimirskii, *Strictly cosingular operators*, Sov. Math. Dokl. **8** (1967), 739-740.

[55] P. Volkmann, *Operator algebren mit einer endlichen Anzahl von maximalen idealen*, Stud. Math. **55** (1976), 151-156.

[56] L. Weis, *On perturbation of Fredholm operators in $L_p(\mu)$ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **67** (1977), 287-292.

[57] L. Weis, *Perturbation classes of semi-Fredholm operators*, Math. Z. **178** (1981), 429- 442.

[58] T.T. West, *The decomposition of Riesz operators*, Proc. London. Math. Soc. **16** (1966), 737-752.

[59] H.J. Zhong, *Riesz operators on the spaces $L_p(\mu)$ have west decomposition (en chinois)*, Dongbei Shuxue. **4** (1988), 282-288.

[60] H. Zhong, *Tsirelson's space and West decomposition of Riesz operators on it*, **39** (5) (1996), 491-500.