

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED CHERIF MESSAADIA SOUK AHRAS
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Cours de Théorie Spectrale des Équations de Transport

Master de mathématiques appliquées

Proposé par
Dehici Abdelkader

Année universitaire 2017-2018

Table des matières

Introduction	3
1 Rappel sur les c_0-semigroupes dans les espaces de Banach	4
1.1 Définitions et quelques propriétés	4
1.2 Générateurs infinitésimaux de c_0 -semigroupes	9
1.2.1 Théorème de Banach-Steinhaus	20
2 Eléments de la théorie spectrale des opérateurs linéaires non-bornés	25
2.1 Quelques rappels sur la théorie des opérateurs linéaires non-bornés	25
Bibliographie	39

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième année master de mathématiques appliquées, j'ai élaboré ce cours après sept années d'enseignement de cette matière à l'université de Souk-Ahras, en se basant essentiellement sur le livre de M. Mokhtar-Kharroubi intitulé "Mathematical Topics in Neutron Transport Theory" (1997) traitant le cadre absorbant. Ce choix n'est pas venu au hasard du fait que ce dernier auteur est un scientifique qui s'est beaucoup donné dans cet axe de recherches en donnant à chaque paramètre sa vraie nature physique (et non artificielle!), en interprétant très bien les choses et essayant de comprendre les phénomènes physiquement avant de surmonter les problèmes mathématiquement. Qu'il trouve ici toute ma considération.

D'après mes années d'enseignement, j'ai vu que les étudiants ont eu du mal à suivre ce cours, surtout avec un volume horaire hebdomadaire d'un cours et un TD et avec un tel bagage scientifique acquis en licence. Donc j'ai réfléchi à élaborer cette ébauche, en simplifiant pas mal de choses, en détaillant des passages, en clarifiant des zones ambiguës dans les preuves et en l'enrichissant avec des commentaires et des remarques afin de la rendre accessible pour une première lecture.

J'espère que ce modeste travail sera utile aux étudiants du cycle master dans le but d'élargir leur horizon de connaissances et avoir une base solide dans cette thématique.

Ce cours va être développé au fur et à mesure, lentement mais nchallah sûrement.

Chapitre 1

Rappel sur les c_0 -semigroupes dans les espaces de Banach

1.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 1.1.1. Soit X un espace de Banach et soit $(S(t))$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X . La famille $(S(t))_{t \geq 0}$ est dite un c_0 -semigroupe sur X si les propriétés suivantes sont satisfaites

I) Propriété algébrique de semigroupe

1. $S(0) = Id_X$ l'opérateur identité sur X ;
2. $\forall t_1, t_2 \in [0, +\infty[, S(t_1 + t_2) = S_{t_1} \cdot S_{t_2}$.

II) Propriété topologique (de continuité forte)

3. $\forall x \in X$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0$.

Remarque 1.1.1. La multiplication qui apparaît dans la propriété représente la composition des opérateurs linéaires bornés.

Remarque 1.1.2. Dans la propriété topologique, on écrit $\lim_{t \rightarrow 0}$ où $\lim_{t \rightarrow 0^+}$, c'est la même chose du fait que $t \in [0, +\infty[$.

Définition 1.1.2. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X satisfaisant la propriété algébrique I). $(S(t))_{t \geq 0}$ est dite uniformément continue si

l'application $t \in [0, +\infty[\longrightarrow S(t) \in \mathcal{L}(X)$ est continue, ceci est équivalent à dire que

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|S(t) - S(t')\| = 0, \quad (1.1.1)$$

Remarque 1.1.3. Dans la définition précédente, l'ensemble $[0, +\infty[$ est muni de sa topologie usuelle induite par celle de \mathbb{R} et $\mathcal{L}(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité fermé (ou sur les ensembles bornés de X).

Proposition 1.1.1. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X satisfaisant la propriété algébrique I) qui est uniformément continue. Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semigroupe sur X .

Preuve. La propriété algébrique est satisfaite par hypothèse. Il suffit de montrer les propriétés de la continuité forte. On a

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|S(t) - S(t')\| = 0, \quad (1.1.2)$$

alors, si on remplace t' par 0, on déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| = 0. \quad (1.1.3)$$

Maintenant, soit $x \in X$, alors

$$0 \leq \|S(t)x - x\| \leq \|S(t) - Id_X\| \|x\|. \quad (1.1.4)$$

Et donne si on prend la limite $t \rightarrow 0$, on obtient que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| \|x\| = 0, \quad (1.1.5)$$

et par suite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0.$$

Lemme 1.1.1. Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire borné sur X . Alors la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X définie par $S(t) = e^{tA}$ ($t \geq 0$) satisfait la propriété algébrique et elle est uniformément continue

Remarque 1.1.4. Le fait que $S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ est un opérateur linéaire borné provient du fait que $S(t)$ est une limite de la suite $U_m = \sum_{n=0}^m \frac{t^n A^n}{n!}$ dans $\mathcal{L}(X)$ (l'espace des opérateurs linéaires bornés sur X) et cette suite est en fait une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X)$. En effet, soit $\epsilon > 0$ donné et soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m > n$. Alors on a

$$\|U_m - U_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A\|^k}{k!}$$

car $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

D'autre part, comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!}$ converge dans \mathbb{R} et sa limite est le nombre réel positif $e^{t\|A\|}$, le critère de convergence de Cauchy pour les séries convergentes montre en fait qu'il existe $n_0(\epsilon)$ un entier tel que pour tous $m, n \geq n_0$, ($n < m$) on ait

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{t^k \|A\|^k}{k!} < \epsilon$$

et par suite

$$\|U_m - U_n\| < \epsilon \quad \text{pour } m, n \geq n_0 (n < m)$$

et comme $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach, alors $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

Preuve. (du Lemme 1.1.1) on a par définition $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = Id_X + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, ce ci donne $S(0) = Id_X$. D'autre part, $\forall t_1, t_2 \in [0, +\infty[$, on a

$$S(t_1 + t_2) = e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} = S(t_1) \cdot S(t_2)$$

et par suite la propriété algébrique est satisfaite.

Maintenant, on a

$$\|S(t) - Id_X\| = \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|} - 1.$$

et par suite par passage à la limite, on aura

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} (e^{t\|A\|} - 1) = 0.$$

Ceci donne que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| = 0,$$

ce qui prouve le résultat.

Remarque 1.1.5. Dans la preuve du Lemme 1.1.1, on a utilisé en fait l'équivalence suivante

$$\forall t, t', \lim_{t \rightarrow t'} \|S(t) - S(t')\| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| = 0.$$

L'implication \implies a été prouvé au début de la preuve de la Proposition 1.1.1. Maintenant pour l'autre implication raisonnons comme suit : Si $t \rightarrow t'$, alors $t = t' + h$ ou $h \rightarrow 0$.

Dans ce cas

$$\begin{aligned} \|S(t) - S(t')\| &= \|S(t' + h) - S(t')\| \\ &= \|S(t')S(h) - S(t')\| \\ &\leq \|S(t')\| \|S(h) - Id_X\| \end{aligned}$$

En passant à la limite, on a $t \rightarrow t'$ est équivalent à dire que $h \rightarrow 0$ et par suite

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow t'^+} \|S(t) - S(t')\| \leq \|S(t')\| \lim_{h \rightarrow 0} \|S(h) - Id_X\|, \quad (1.1.6)$$

et on aura

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} \|S(t) - S(t')\| = 0.$$

Maintenant si $t \rightarrow t'^-$, alors $t = t' - h$ ou $h \rightarrow 0$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \|S(t) - S(t')\| &= \|S(t' - h) - S(t')\| \\ &= \|S(t' - h) - S((t' - h) + h)\| \\ &= \|S(t' - h) - (Id_X - S(h))\| \\ &\leq \|S(t' - h)\| \|S(h) - Id_X\|, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

et par passage à la limite, on trouve

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{t \rightarrow t'^-} \|S(t) - S(t')\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \|S(t' - h)\| \|S(h) - Id_X\| \\ &\leq M \lim_{h \rightarrow 0} \|S(h) - Id_X\| = 0. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Remarque 1.1.6. L'existence de M dans la preuve précédente vient en fait du fait suivant.

Comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(S(h) - Id_X)\| = 0,$$

par suite

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\|S(h)\| - 1) = 0.$$

Ceci montre que pour h suffisamment petit la fonction $h \rightarrow \|S(h)\|$ est borné, désignons par $[0, d]$ un tel intervalle sur lequel $\|S(h)\|$ est majorée par exemple pour $1 + \epsilon$ et prenons par exemple $t' - h$ dans un intervalle de la forme $[B, t']$, $B > 0$. Alors, en faisant la division euclidienne de chaque élément de l'intervalle $[B, t']$ par α , on aura $\forall s \in [B, t']$, $\exists n_\epsilon \geq 0$ (entier) tel que $s = \alpha n_s + \gamma$ ou $\gamma \in]0, \alpha]$ et par suite

$$\|S(s)\| = \|S(n_s \alpha + \gamma)\| \leq \|S(n_s \alpha)\| \|S(\gamma)\| \leq \|S(\alpha)\|^{n_s} \|S(\gamma)\| \quad (1.1.9)$$

Maintenant, l'ensemble des n_s tels que $s = n_s \alpha + \gamma$ pour $s \in [B, t']$ est un ensemble fini du fait que l'intervalle $[B, t']$ est borné et par suite $\forall s \in [B, t']$, on a $n_s \in \{0, 1, \dots, k_0\}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, par conséquent on aura

$$\|S(s)\| \leq \max_{k \in \{0, 1, \dots, k_0\}} (\|S(\alpha)\|^k) (1 + \epsilon) = M \quad (1.1.10)$$

Lemme 1.1.2. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire borné sur X . Alors si $\|A\| < 1$, l'opérateur $Id_X - A$ est un opérateur linéaire borné inversible (bijectif).*

Preuve. Il suffit donc de trouver B linéaire borné sur X tel que $(Id_X - A)B = B(Id_X - A) = Id_X$. Alors, come A est linéaire borné sur X avec $\|A\| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ converge dans $\mathcal{L}(X)$ et sa somme est un opérateur linéaire borné qu'on le note par exemple par B , il vient que

$$B(Id_X - A) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n \right) (Id_X - A) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1} = Id_X.$$

Aussi, on a

$$(Id_X - A)B = (Id_X - A) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A^{n+1} = Id_X,$$

et par suite, l'opérateur $Id_X - A$ est un opérateur linéaire borné bijectif son inverse est

$$B = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

1.2 Générateurs infinitésimaux de c_0 -semigroupes

Définition 1.2.1. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X et soit A l'opérateur défini par

$$D(A) = \{x \in X \text{ tel que l'application } t \in [0, +\infty[\longrightarrow S(t)x \in X \\ \text{est différentiable à droite de } 0\} \quad (1.2.1)$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \\ = (S(t)x)'_{t=0} \\ = \text{la différentielle à droite de } 0 \text{ de l'application } t \in [0, +\infty[\longrightarrow S(t)x \in X \text{ pour } x \in D(A) \quad (1.2.2)$$

est dit le générateur infinitésimal du semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$.

Remarque 1.2.1. En utilisant la linéarité des opérateurs $S(t)$ on constate que A est un opérateur linéaire et $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X .

Remarque 1.2.2. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de deux espaces de Banach respectivement E_1 et E_2 et soit $x_0 \in U_1$ et $f : U_1 \longrightarrow U_2$ une application. Il est à rappeler que f est différentiable au point x_0 s'il existe une application linéaire continue (ou opérateur linéaire borné) A_{x_0} de E_1 dans E_2 tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_{x_0}(h) + \epsilon(h) \quad (\text{pour } h \text{ suffisamment petit})$$

où $\epsilon(h) = o(\|h\|)$.

Proposition 1.2.1. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue. Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(t) dt = Id_X$$

Preuve. Comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continue, alors $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tel que $\forall t \in [0, +\infty[, t < \delta$, on ait

$$\|S(t) - Id_X\| < \epsilon,$$

et par suite, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)dt - Id_X &= \frac{1}{h} \int_0^h S(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^h Id_X dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h (S(t) - Id_X)dt \end{aligned}$$

et en passant à la norme, il vient que

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h S(t)dt - Id_X \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t) - Id_X\| dt < \epsilon$$

pour $h < \delta$, ceci donne le résultat.

Remarque 1.2.3. Il est à noter que pour le cas d'une famille uniformément continue $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur $\int_0^h S(t)dt, h \geq 0$ est l'opérateur linéaire borné sur X défini par

$$\left(\int_0^h S(t)dt \right) x = \int_0^h S(t)x dt.$$

Aussi pour $h = 0$, on a $\int_0^0 S(t)dt = 0$. On verra plus loin pourquoi ce même raisonnement s'appliquera au cas des c_0 -semigroupes, tout revient à montrer l'uniforme bornitude des normes de cette famille sur un intervalle de la forme $[0, t], t > 0$.

Proposition 1.2.2. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X satisfaisant la propriété algébrique I) et aui est uniformément continue, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+h} S(t)dt = S(\alpha_0).$$

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de la Proposition 1.2.2 et utiliser la Remarque 1.1.4

Proposition 1.2.3. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors $\forall x \in X$. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x dt = x.$$

Preuve. En effer, dans ce cas, soit $x \in X$. Alors $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x)$ tel que $\forall t \in [0, +\infty[, t < \delta(\epsilon, x)$, alors

$$\|S(t)x - x\| < \epsilon$$

et par suite, on aura

$$\left\| \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h x dt \right\| \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t)x - x\| dt < \epsilon,$$

ceci prouve le résultat.

Proposition 1.2.4. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors, on a $\forall x \in X$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+h} S(t)x dt = S(\alpha_0)x.$$

Preuve. soit $x \in X$. Alors $\forall h > 0$, il vient que

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+h} S(t)x dt = \frac{1}{h} \int_0^h S(\alpha_0 + t)x dt,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+h} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^h S(\alpha_0)x dt \right\| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(\alpha_0 + t)x - S(\alpha_0)x\| dt \\ &\leq \|S(\alpha_0)\| \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t)x - x\| dt \\ &\leq \|S(\alpha_0)\| \epsilon, \end{aligned}$$

(il suffit de prendre $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\|S(\alpha_0)\|}$) pour $h < \delta$ (voir preuve de la Proposition 1.2.3, ceci prouve le résultat pour $h > 0$).

Par un même raisonnement, on peut montrer le résultat pour $h < 0$ en se basant aussi sur un raisonnement de type Remarque 1.1.4.

Remarque 1.2.4. Il est facile de voir que la Proposition 1.2.2 étend la Proposition 1.2.1 et la Proposition 1.2.4 étend aussi la Proposition 1.2.3. En effet, il suffit de prendre $\alpha = 0$.

Maintenant, on définit le type d'un c_0 -semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X par

$$\inf\{w \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } M_w \geq 1 \text{ satisfaisant } \|S(t)\| \leq M_w e^{wt}\}$$

Remarque 1.2.5. le type d'un c_0 -semigroupe est toujours un élément de l'ensemble $[-\infty, +\infty[$.

Rappelons ici le résultat classique d'analyse réelle

Lemme 1.2.1. Une suite réelle (x_n) converge vers l si et seulement si $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$.

Ce lemme s'applique aussi au cas des notations $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ des fonctions au voisinage des points ou à l'infini. Ici

$$\underline{\lim} x_n = \sup_k \inf_{n \geq k} x_n = \sup_k \{ \inf \{x_1, x_2, \dots\}, \inf \{x_2, \dots\}, \dots \}$$

et

$$\overline{\lim} x_n = \inf_k \sup_{n \geq k} x_n = \inf_k \{ \sup \{x_1, x_2, \dots\}, \sup \{x_2, \dots\}, \dots \}$$

Avant de donner une caractérisation du type d'un c_0 -semigroupe, on donne ici un lemme préparatoire qui va jouer un rôle crucial pour cet objet.

Lemme 1.2.2. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur les intervalles compacts de $[0, +\infty[$ satisfaisant

$$f(t_1 + t_2) \leq f(t_1) + f(t_2), \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

Alors

$$\inf_{t > 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t}$$

existe

Preuve. Soit $t_0 > 0$ arbitraire, alors par division de t par t_0 , il vient que

$$t = n_t t_0 + \alpha, \alpha \in [0, t_0[$$

D'autre part, le fait que $f(t_1 + t_2) \leq f(t_1) + f(t_2)$ montre en fait que \forall l'entier $p \geq 1$, on a $f(pt) \leq pf(t)$ (on le montre par exemple par récurrence) et par suite, on aura

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(n_t t_0 + \alpha)}{t} \leq \frac{f(n_t t_0)}{t} + \frac{f(\alpha)}{t} \leq \frac{f(n_t t_0)}{n_t t_0} + \frac{f(\alpha)}{n_t t_0}$$

(car le fait que $t \geq n_t t_0$ implique que $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n_t t_0}$). De plus, d'après ci-dessus, on a

$$\frac{f(n_t t_0)}{n_t t_0} \leq \frac{n_t f(t_0)}{n_t t_0} = \frac{f(t_0)}{t_0}.$$

D'autre part, par hypothèse f est bornée sur $[0, t_0]$ donc, il va exister M tel que $|f(\alpha)| \leq M, \forall \alpha \in [0, t_0]$, ça d'un coté et d'un autre coté, on a si $t \rightarrow +\infty$ alors $n_t \rightarrow +\infty$, par suite

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(t_0)}{t_0}.$$

Et comme $t_0 \in]0, +\infty[$ est quelconque, alors

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \leq \inf_{t_0 > 0} \frac{f(t_0)}{t_0} = \inf_{t > 0} \frac{f(t)}{t} \leq \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t},$$

(car la limite inf est toujours supérieure ou égale à l'inf). Maintenant, par application du Lemme 1.2.2, on obtient le résultat suivant

Proposition 1.2.5. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors son type w_0 est donné par

$$w_0 = \inf_{t > 0} \frac{\ln(\|S(t)\|)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\|S(t)\|)}{t}$$

Preuve. Le résultat s'obtient par application de Lemme 1.2.2 en prenant $f(t) = \ln(\|S(t)\|)$. En effet, le fait que l'application $t \rightarrow \|S(t)\|$ est bornée sur chaque intervalle de la forme $[0, t]$ et la croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$ montre que cette application est bornée sur chaque intervalle compact de $]0, +\infty[$. De plus, on a

$$\begin{aligned} f(t_1 + t_2) &= \ln(\|S(t_1 + t_2)\|) \leq \ln(\|S(t_1)\|) + \ln(\|S(t_2)\|) \\ &= \ln(\|S(t_1)S(t_2)\|) \\ &= f(t_1) + f(t_2) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.6. Dans le cas où le c_0 -semigroupe est nilpotent, c'est à dire il existe $t_0 > 0$ tel que $S(t) = 0, \forall t > t_0$ (ici par 0 on note l'opérateur linéaire nul). Alors par application de la formule ci-dessus, on conclut que son type w_0 est égale à $-\infty$.

Le résultat suivant montre en fait l'unicité du générateur infinitésimal d'un c_0 -semigroupe.

Proposition 1.2.6. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors son générateur infinitésimal est unique.

On suppose que A et B sont deux générateurs infinitésimaux du c_0 -semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ avec $A \neq B$. Alors on a ou bien $D(A) \neq D(B)$ ou bien $Ax \neq Bx$ pour un certain x si $D(A) = D(B)$. Mais par définition

$$D(A) = \left\{ x \in X \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \tag{1.2.4}$$

et

$$D(B) = \left\{ x \in X \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (1.2.5)$$

Ceci montre que $D(A) = D(B)$.

D'autre part, par définition de l'image Ax et Bx pour $x \in D(A) = D(B)$, on a

$$Ax = Bx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad (x \in D(A) = D(B)) \quad (1.2.6)$$

Ceci prouve que $Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A) = D(B)$, ce qui est une contradiction.

Le théorème suivant donne en fait une correspondance entre les opérateurs linéaires bornés et les générateurs infinitésimaux des familles $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés satisfaisant la propriété algébrique I) qui sont uniformément continues.

Théorème 1.2.1. Soit X un espace de Banach et soit B un opérateur linéaire sur X . Alors A est un générateur infinitésimal d'une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Preuve. Si A est linéaire borné sur X . Si on définit la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ par

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Alors d'après le Lemme 1.1.1, $(S(t))_{t \geq 0}$ satisfait la propriété algébrique I) et de plus, elle est uniformément continue. De plus, en utilisant un calcul analogue à celui utilisé dans la preuve du Lemme 1.1.1, il vient que

$$0 \leq \left\| \frac{S(t) - Id_X}{t} - A \right\| \leq \|A\| \|S(t) - Id_X\|, \quad (1.2.7)$$

et en faisant tendre t vers 0, on constate que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t) - Id_X}{t} - A \right\| \leq \|A\| \lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\|. \quad (1.2.8)$$

Comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continue alors $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t) - Id_X\| = 0$ et par suite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t) - Id_X}{t} - A \right\| = 0$$

et donc on conclut que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - Id_X}{t} = A$. Cette limite est dans l'espace des opérateurs linéaires bornés. Maintenant, comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, il vient que

$$\forall x \in X, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax$$

et A est le générateur infinitésimal du c_0 -semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$.

Maintenant soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue. On se donne $\epsilon > 0$, il est facile d'observer que si B est un opérateur linéaire borné bijectif alors ϵB est aussi un opérateur linéaire borné bijectif et l'inverse est aussi vrai (en multipliant ϵB par $\frac{1}{\epsilon}$). Fixons maintenant $\epsilon > 0$ suffisamment petit, alors la Proposition 1.2.1 montre que $\|Id_X - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta S(t)dt\| < \epsilon$ pour un certain $\delta < \eta$. Prenons $\epsilon = 1$. Alors, on aura l'existence d'un certain $B > 0$ tel que $\|Id_X - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha S(t)dt\| < 1$ pour un certain $\alpha < B$. Fixons maintenant $\alpha_0 < B$, alors $\|Id_X - \frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt\| < 1$. Ceci montre que l'opérateur $\frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt$ est un opérateur linéaire borné bijectif car $\frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt = Id_X - (Id_X - \frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt)$ et il suffit d'utiliser le Lemme 1.1.2. De plus, comme $\frac{1}{\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt$ est linéaire borné bijectif alors $\int_0^{\alpha_0} S(t)dt$ est un opérateur linéaire borné bijectif. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(S(h) - Id_X) \int_0^{\alpha_0} S(t)dt &= \frac{1}{h} \int_0^{\alpha_0} S(h+t)dt - \frac{1}{h} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{h+\alpha_0} S(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^{\alpha_0} S(t)dt \end{aligned}$$

Le fait que $\int_0^{\alpha_0} S(t)dt$ est un opérateur linéaire borné bijectif, alors il vient que

$$\frac{1}{h}(S(h) - Id_X) = \frac{1}{h} \left(\int_h^{h+\alpha_0} S(t)dt - \int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1}. \quad (1.2.9)$$

Mais par la relation de Chasles, on a

$$\int_h^{h+\alpha_0} S(t)dt - \int_h^{\alpha_0} S(t)dt = \int_h^{\alpha_0} S(t)dt + \int_{\alpha_0}^{h+\alpha_0} S(t)dt - \left[\int_0^h S(t)dt + \int_h^{\alpha_0} S(t)dt \right] - \left[\int_{\alpha_0}^{h+\alpha_0} S(t)dt - \int_0^{h+} S(t)dt \right] \quad (1.2.10)$$

et donc

$$\frac{1}{h}(S(h) - Id_X) = \frac{1}{h} \left(\int_h^{h+\alpha_0} S(t)dt - \int_0^h S(t)dt \right) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1}.$$

En passant à la limite et en utilisant la Proposition 1.2.2 et la Proposition 1.2.1, il vient que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(S(h) - Id_X)}{h} = (S(\alpha_0) - Id_X) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1}. \quad (1.2.11)$$

Il est à noter que cette dernière limite est dans l'espace des opérateurs linéaires bornés sur X et elle est égale à l'opérateur linéaire borné $(S(\alpha_0) - Id_X) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1}$. De plus comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, il vient que $\forall x \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(S(h)x - x)}{h} = (S(\alpha_0) - Id_X) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1} (x). \quad (1.2.12)$$

et par suite le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$ est l'opérateur linéaire borné $(S(\alpha_0) - Id_X) \left(\int_0^{\alpha_0} S(t)dt \right)^{-1}$.

Lemme 1.2.3. (classique en topologie) Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application réelle continue alors f est bornée et atteint sa borne inférieure et supérieure, en d'autres termes, $\exists M > 0$ tel que $\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M$. De plus, $\exists x_0 \in X$ et $\exists x_1 \in X$ tels que

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x),$$

et

$$f(x_1) = \sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x),$$

Remarque 1.2.7. On rappelle que le produit cartésien fini d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact, on peut le munir par exemple de l'une des distances usuelles

équivalentes d_1, d_2 ou d_3 telles que

$$d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \quad (1.2.13)$$

$$d_2((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.14)$$

$$d_3((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max(|y_i - x_i|)_{i=1}^n \quad (1.2.15)$$

Remarque 1.2.8. En tenant compte de la remarque précédente, on déduit que $\forall t_1 \in [0, +\infty[$ et $\forall t_2 \in [0, +\infty[$, l'ensemble $[0, t_1] \times [0, t_2]$ est un ensemble compact de l'ensemble $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

Le théorème suivant montre l'unicité d'une famille d'opérateurs linéaires bornés satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue engendrée par un opérateur linéaire borné A .

On rappelle ici le résultat classique suivant

Proposition 1.2.7. Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques et soit $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Soient $f_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles continues respectivement en x_1 et en x_2 . Alors l'application

$$\begin{aligned} \tilde{h} : (X_1 \times X_2, \tilde{d}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \tilde{h}(x, y) = f_1(x)f_2(y) \end{aligned}$$

est continue au point (x_1, x_2) (Ici \tilde{d} est l'une des 3 métriques définies dans la Remarque 1.2.7.

Le théorème suivant montre en fait l'unicité de la famille d'opérateurs linéaires bornés $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue.

Théorème 1.2.2. Soient $(S_1(t))_{t \geq 0}$ et $(S_2(t))_{t \geq 0}$ deux familles d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach satisfaisant la propriété algébrique I) et qui sont uniformément continues. Si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_1(t) - Id_X}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_2(t) - Id_X}{t}, \quad (1.2.16)$$

alors $S_1(t) = S_2(t), \forall t \geq 0$.

Preuve. Comme l'ensemble $[0, \alpha] \times [0, \alpha] = [0, \alpha]^2$ est un compact de l'ensemble $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ (voir la Remarque 1.2.7) et chacune des applications $t \in [0, +\infty[\rightarrow \|S_1(t)\|$ et $t \in [0, +\infty[\rightarrow \|S_2(t)\|$ sont continues (car la continuité des applications $t \in [0, +\infty[\rightarrow S_1(t) \in \mathcal{L}(X)$ et $t \in [0, +\infty[\rightarrow S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$ entraîne la continuité de celles indiquées ci-dessus) et par suite pour tout $\gamma > 0$, il va exister une constante $M > 0$ telle que $\|S_1(t_1)\| \|S_2(t_2)\| \leq M$ pour tous $t_1, t_2 \in [0, \gamma]^2$ (voir lemme classique de topologie). On se donne $\epsilon > 0$, alors il va exister $\delta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\left\| \frac{S_1(h) - Id_X}{h} - \frac{S_2(h) - Id_X}{h} \right\| = \left\| \frac{S_1(h) - S_2(h)}{h} \right\| < \frac{\epsilon}{\gamma M} \text{ pour } 0 \leq h \leq \delta \quad (1.2.17)$$

Soit maintenant $0 \leq t \leq \gamma$, on peut toujours trouver n suffisamment grand tel que $\frac{t}{n} < \delta$. Tout d'abord, on va utiliser une technique de retranchement de termes. En effet, on a

$$\begin{aligned} S_1(t) - S_2(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[S_1\left(\left(n-k\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{kt}{n}\right) - S_1\left(\left(n-k-1\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] \\ &= S_1(t) Id_X - S_1\left(\frac{n-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{t}{n}\right) + S_1\left(\frac{n-1}{n}t\right) S_2\left(\frac{t}{n}\right) + \dots - S_1(0) S_2\left(\frac{nt}{n}\right). \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant le fait que la norme de la somme est inférieure ou égale à la somme des normes, il vient que

$$\begin{aligned} \|S_1(t) - S_2(t)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[S_1\left(\left(n-k\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{kt}{n}\right) - S_1\left(\left(n-k-1\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left[S_1\left(\left(n-k\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{kt}{n}\right) - S_1\left(\left(n-k-1\right)\frac{t}{n}\right) S_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] \right\|. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

D'autre part, on a $S_1\left(\left(n-k\right)\frac{t}{n}\right) = S_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) S_1\left(\frac{t}{n}\right)$ et $S_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) = S_2\left(\frac{kt}{n}\right) S_2\left(\frac{t}{n}\right)$.

En utilisant ce fait, il vient que

$$\begin{aligned} \|S_1(t) - S_2(t)\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S_1\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) \right\| \left\| S_1\left(\frac{t}{n}\right) - S_2\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S_2\left(\frac{kt}{n}\right) \right\| \\ &\leq \frac{Mn\epsilon t}{M\gamma n} \\ &\leq \epsilon \quad (\text{car si } t \in [0, \gamma] \text{ alors } \frac{t}{\gamma} \leq 1) \end{aligned}$$

et comme $\epsilon > 0$ arbitraire alors $S_1(t) = S_2(t), \forall t \in [0, \gamma]$ et donc $S_1(t) = S_2(t), \forall t \in [0, \gamma]$. Maintenant $\forall t > \gamma$, on utilise la division, il va exister $n_t \geq 1$ tel que $t = n_t \gamma + B$ (où $B \in [0, \gamma[$) et par suite $S_1(t) = S_1(n_t \gamma + B) = S_1(n_t \gamma) S_1(B) = [S_1(\gamma)]^{n_t} S_1(B)$. Comme $S_1(B) = S_2(B)$ et $S_1(\gamma) = S_2(\gamma)$, il vient que $[S_1(\gamma)]^{n_t} = [S_2(\gamma)]^{n_t}$ et par conséquent, on aura $S_1(t) = [S_1(\gamma)]^{n_t} [S_1(B)] = [S_2(\gamma)]^{n_t} [S_2(B)] = S_2(t)$, ceci prouve le résultat.

Le résultat suivant donne quelques propriétés concernant la familles d'opérateurs linéaires bornés satisfaisant la propriété algébrique I) et qui sont uniformément continues, l'une des propriétés fondamentales est la commutativité avec le générateur (qui est un opérateur linéaire borné d'après le Théorème 1.2.1).

Proposition 1.2.8. Soient $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X satisfaisant la propriété algébrique I) et qui est uniformément continue. Alors

1. Il existe un opérateur linéaire borné A tel que $S(t) = e^{tA}$.
2. $\exists w \geq 0$ tel que $\|S(t)\| \leq e^{wt}$.
3. L'opérateur A dans 1 est le générateur infinitésimal de la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ et il est unique.
4. L'application $t \rightarrow S(t) \in \mathcal{L}(X)$ est différentiable sur $]0, +\infty[$ et à droite de 0 et on a $S(t)A = AS(t)$.

Preuve.

1. Montrons 1 et 3 à la fois. On a si A est le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$, alors $A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - Id_X}{t}$. D'autre part, si on note par $\tilde{S}(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$, cette famille satisfait la propriété algébrique I) et elle est uniformément continue (voir le Lemme 1.1.2). De plus, A est le générateur infinitésimal de $\tilde{S}(t)$, en appliquant le Théorème 1.2.2, il vient que $\tilde{S}(t) = S(t), \forall t \in [0, +\infty[$ et l'unicité de A vient en fait de l'unicité du générateur dans ce cas (voir Proposition 1.2.1).
2. Montrons 2, on a $\|S(t)\| = \|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n = e^{t\|A\|}$ (il suffit de prendre $w = \|A\|$).

$$3. \text{ On a } \forall t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} S(t) \frac{(S(h) - Id_X)}{h} = S(t) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - Id_X}{h} \right) = S(t)A$$

D'autre part, on a $S(t)(S(h) - Id_X) = (S(h) - Id_X)S(t)$ car $S(t)S(h) = S(t+h) = S(h+t) = S(h)S(t)$ et d'un autre coté $S(t)Id_X = Id_X S(t) = S(t)$. Ceci entraîne que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)(S(h) - Id_X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(h) - Id_X}{h} \right) S(t) = AS(t),$$

et par suite, on a

$$\frac{dS(t)}{dt} = S(t)A = AS(t)$$

On énonce maintenant le théorème de Banach-Steinhaus qui est l'un des théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle.

1.2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E_1 un espace de Banach et soit E_2 un espace normé. On note par $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés (ou applications linéaires continues) de E_1 dans E_2 . Soit \mathcal{H} un ensemble non vide de $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Alors on a l'alternative suivante

1. $\exists M > 0$ tel que $\forall T \in \mathcal{H}, \|T\| \leq M$;
2. $\exists x_0 \in E_1$ tel que $\sup\{\|Tx_0\|, T \in \mathcal{H}\} = +\infty$.

Théorème 1.2.3. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors il va exister deux constantes $w \in \mathbb{R}, M \geq 1$ tels que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{pour tout } 0 \leq t < \infty \quad (1.2.19)$$

Preuve. Tout d'abord, on va montrer qu'il va exister $\alpha > 0$ tel que $\|S(t)\|$ est borné $\forall t \in [0, \alpha]$. Dans le cas contraire, il va exister une suite $(t_n)_n \subset [0, +\infty[$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ et $\|S(t_n)\| \geq n$. Par application du théorème de Banach-Steinhaus, on voit que 1 n'est pas vérifiée, donc nécessairement c'est 2 qui est satisfaite et par suite, il va exister $x_0 \in X$ tel que $\sup\{\|S(t_n)x_0\|, n \geq 1\} = +\infty$. Mais le fait que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semigroupe montre que

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x_0 = x_0.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(t_n)x_0 = x_0.$$

Par suite la suite $\{\|S(t_n)x_0\|, n \geq 1\}$ est bornée (car chaque suite convergente est bornée) et par suite $\sup\{\|S(t_n)x_0\|, n \geq 1\} < +\infty$, ce qui est une contradiction, donc

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \alpha].$$

Ici $M \geq 1$ car $S(0) = Id_X$. Maintenant, on pose $w = \frac{1}{\alpha} \ln M$. Maintenant, si $t > \alpha$, alors on utilise la division de t par α , il vient que

$$t = n_t \alpha + \delta \text{ où } \delta \in [0, \alpha[$$

et par suite, en utilisant la propriété du semigroupe, il vient que

$$S(t) = S(n_t \alpha + \delta) = S(n_t \alpha) + S(\delta) = [S(\alpha)]^{n_t} S(\delta)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &\leq \| [S(\alpha)]^{n_t} \| \|S(\delta)\| \leq \| [S(\alpha)] \|^{n_t} \|S(\delta)\| \leq M.M^{n_t} = M^{n_t+1} \\ &\leq M.M^{\frac{t}{\alpha}} \end{aligned}$$

car $\frac{t}{\alpha} \geq n_t$, mais $M^{\frac{t}{\alpha}} = e^{\frac{t}{\alpha} \ln M} = e^{wt}$ et donc $\|S(t)\| \leq M e^{wt}$. Ceci prouve le résultat.

Remarque 1.2.9. On a vu que la preuve du théorème précédent est basée sur le théorème de Banach-Steinhaus, ce théorème est d'une utilité majeure, il montre en fait comment d'une bornitude ponctuelle, on passe à une bornitude uniforme, comme application de ce théorème, on montre que la limite simple d'une suite d'opérateurs linéaires bornés entre espaces de Banach est aussi un opérateur linéaire borné, ce qui n'est pas vrai dans le cas général des applications, il suffit par exemple de prendre sur l'intervalle $[0,1]$ la suite de fonctions $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, on sait bien que cette suite converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue au point $x = 1$.

Remarque 1.2.10. Il est facile de voir d'après la preuve du Théorème 1.2.3 que la condition $w \in \mathbb{R}$ peut être remplacée par $w \geq 0$.

On se donne un c_0 -semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X et soit $x \in X$. La proposition suivante montre la continuité de l'application $t \in [0, +\infty[\rightarrow S(t)x$. On rappelle que la continuité de cette application au point 0 est assurée par la condition 3 concernant la forte continuité d'un c_0 -semigroupe.

Proposition 1.2.9. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X . Alors $\forall x \in X$, l'application $t \rightarrow S(t)x$ est continue de $[0, +\infty[$ dans X .

Preuve. Soient $t_0, h \in [0, +\infty[$. En utilisant la Théorème 1.2.3, on a

$$\|S(t_0 + h)x - S(t_0)x\| \leq \|S(t_0)\| \|S(h)x - x\| \leq Me^{wt_0}$$

et par passage à la limite $h \rightarrow 0$, il vient que $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(t_0 + h)x - S(t_0)x\| = 0$. D'autre part, soit $h \in [0, +\infty[$ avec $t_0 \geq h$. Alors

$$\begin{aligned} \|S(t_0 - h)x - S(t_0)x\| &\leq \|S(t_0 - h)\| \|S(h)x - x\| \\ &\leq Me^{w(t_0 - h)} \|S(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt_0} \|S(h)x - x\|. \end{aligned}$$

Car la fonction exponentielle est croissante et $t_0 - h \leq t_0$ avec le fait que w peut être choisi positif voir Remarque 1.2.10, et par passage à la limite pour $h \rightarrow 0$, il vient que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|S(t_0 - h)x - S(t_0)x\| = 0$$

et donc en fait, on a montré la continuité à droite et à gauche de t_0 de l'application $t \in [0, +\infty[\rightarrow S(t)x$, ce qui prouve le résultat.

Le résultat suivant établit des formules (relations) fondamentales entre le c_0 -semigroupe et son générateur.

Théorème 1.2.4. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Banach X et soit A son générateur infinitésimal. Alors

1. $\forall x \in X$ on a $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t S(s) ds \right) = S(t)x - x \tag{1.2.20}$$

2. $\forall x \in D(A), S(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax \quad (1.2.21)$$

3. $\forall x \in D(A),$

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(r)Ax dr = \int_s^t AS(r)x dr \quad (1.2.22)$$

Preuve. Commençons à prouver tout d'abord l'assertion 1. Soit $x \in X$ et $h \in [0, +\infty[$.

Alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{S(h) - I}{h}\right) \left(\int_0^t S(s)x ds\right) &= \frac{1}{h} \left[\int_0^t [S(s+h)x - S(s)x] ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^{t+h} S(s')x ds' - \int_0^t S(s')x ds' \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^t S(s')x ds' + \int_t^{t+h} S(s')x ds' - \int_0^h S(s')x ds' - \int_h^t S(s')x ds' \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} S(s)x ds - \int_0^h S(s)x ds \right] \end{aligned}$$

et par passage à la limite $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} S(s)x ds \right] = S(t)x \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_0^h S(s)x ds \right] = x$$

(voir Propositions 1.2.3 et 1.2.4), par suite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(h) - Id_X}{h}\right) \left(\int_0^t S(s)x ds\right)$$

existe et égale à $S(t)x - x$, ceci montre que $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ et $A \left(\int_0^t S(s)x ds\right) = S(t)x - x$.

Pour montrer 2, il faut raisonner dérivée à droite et dérivée à gauche. On a pour $x \in D(A)$ et $h > 0$,

$$\frac{S(h) - Id_X}{h} (S(t)x) = S(t) \left(\frac{S(h) - Id_X}{h}\right) (x)$$

(ici, on a utilisé la propriété algébrique du c_0 -semigroupe et le fait que les opérateurs de la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ commutent entre eux et qu'il sont linéaires)

Par passage à la limite (pour $h \rightarrow 0$) et en utilisant la continuité des opérateurs $S(t)$, il vient que

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Passons maintenant à la dérivée à gauche, on a par définition

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} \right).$$

D'autre part, on a

$$\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)Ax = S(t-h) \left[\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right] + S(t-h)Ax - S(t)Ax.$$

De plus, on a $\|S(t-h)\|$ est borné sur chaque intervalle de la forme $[0, A]$, ($A > 0$) (voir Théorème 1.2.3) et donc par passage à la limite ($h \rightarrow 0$), on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(t-h) \left[\frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right] = 0$$

Aussi, la continuité de l'application $t \in [0, +\infty[\rightarrow S(t)x$ montre que $\lim_{h \rightarrow 0} S(t-h)Ax = S(t)Ax$ et par conséquent,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)Ax \right] = 0.$$

Ceci montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} = S(t)Ax = AS(t)x.$$

Maintenant, on va démontrer l'assertion 3. On a d'après 2,

$$S(r)Ax = \frac{d}{dr}(S(r)x).$$

On aura

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(r)Ax dr = \int_s^t \frac{d}{dr}(S(r)x) dr = S(t)x - S(s)x.$$

Ceci prouve le résultat.

Chapitre 2

Eléments de la théorie spectrale des opérateurs linéaires non-bornés

2.1 Quelques rappels sur la théorie des opérateurs linéaires non-bornés

Définition 2.1.1. Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors T est dit à domaine dense si $\overline{D(T)} = X_1$. Ceci revient à dire que $\forall x \in X_1, \exists \{x_n\}_{n \geq 1} \subset D(T)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ (dans X_1).

Exemple 2.1.1. Soient $X_1 = X_2 = L_2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à carrés intégrables sur \mathbb{R} muni de sa norme usuelle, c'est à dire $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \forall f \in L_2(\mathbb{R})$.

$D(T) = C^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classes C^1 sur \mathbb{R} avec $T(f) = f'$ pour $f \in D(T)$. Alors T est à domaine dense, en effet, si on note par $D(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts dans \mathbb{R} , alors $D(\mathbb{R})$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$. De plus, $D(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$ et par suite $C^1(\mathbb{R}) = D(T)$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.2. Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors le graphe de T noté $G_r(T)$ est défini par

$$G_r(T) = \{(x, T(x)) \in X_1 \times X_2 \text{ avec } x \in D(T)\}.$$

Définition 2.1.3. Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors T est dit fermé si $G_r(T)$ est fermé dans $X_1 \times X_2$ (muni de la topologie produit induite par l'une des 3 normes équivalentes usuelles (voir Remarque 1.2.7).

Proposition 2.1.1. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors T est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset D(T)$, si $x_n \rightarrow x$ dans X_1 et $Tx_n \rightarrow y$ dans X_2 . Alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$.*

Preuve. On suppose que T est fermé, alors d'après la définition 2.1.3, $G_r(T)$ est fermé dans $X_1 \times X_2$. Supposons que $(x_n)_{n \geq 1} \subset D(T)$ et $x_n \rightarrow x$ dans X_1 et $Tx_n \rightarrow y$ dans X_2 , alors, on a $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ dans $X_1 \times X_2$. En effet, on a

$$\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, Tx_n - y)\|_{X_1 \times X_2} = \|x_n - x\|_{X_1} + \|Tx_n - y\|_{X_2}$$

(on a choisi ici par exemple la norme produit est égale à la somme des normes des facteurs). Il est clair que si $x_n \rightarrow x$ dans X_1 et $Tx_n \rightarrow y$ dans X_2 , alors $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - y\| = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, Tx_n) - (x, y)\|_{X_1 \times X_2} = 0$, ce qui est équivalent au fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, Tx_n) = (x, y)$. Mais $G_r(T)$ est fermé et $(x_n, Tx_n) \in G_r(T)$ et donc $(x, y) \in G_r(T)$, par suite $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Inversement, on suppose que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset D(T)$ si $x_n \rightarrow x$ et $Tx_n \rightarrow y$, alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$ implique que T est fermé. On va utiliser le raisonnement par suites. Soit $(x_n, Tx_n)_{n \geq 1} \subset G_r(T)$, si $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ dans $X_1 \times X_2$, alors nécessairement $x_n \rightarrow x$ dans X_1 et $Tx_n \rightarrow y$ dans X_2 . D'après l'hypothèse, on a $x \in D(T)$ et $Tx = y$, ceci montre que $(x, y) \in G_r(T)$ et par suite $G_r(T)$ est fermé dans $X_1 \times X_2$ et par suite T est fermé.

Donnons à présent quelques résultats préparatoires concernant les opérateurs fermés qui vont être utilisés dans la suite

Proposition 2.1.2. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire fermé de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors $(D(T), \|\cdot\|_{G_r})$ est un espace de Banach où $\|\cdot\|_{G_r}$ est la norme du graphe définie par*

$$\|x\|_{G_r} = \|x\| + \|Tx\|.$$

Preuve. Montrons que $(D(T), \|\cdot\|_{G_r})$ est un espace normé

1. On a $\|x\|_{G_r} = 0 \iff \|x\| = 0$ et $\|Tx\| = 0$ et par suite $x = 0$.
2. On a $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda x\|_{G_r} = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\| = |\lambda|(\|x\| + \|Tx\|) = |\lambda|\|x\|_{G_r}$ (car T est linéaire).

3. $\forall x_1, x_2 \in D(T)$, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{G_r} &= \|x + y\| + \|T(x + y)\| \\ &= \|x + y\| + \|Tx + Ty\| \\ &\leq (\|x\| + \|Tx\|) + (\|y\| + \|Ty\|) \\ &= \|x\|_{G_r} + \|y\|_{G_r}. \end{aligned}$$

Par l'utilisation de l'inégalité triangulaire.

Maintenant, soit $\{x_n\} \subset D(T)$ telle que x_n est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{G_r}$. Montrons qu'il existe $x \in D(T)$ tel que $x_n \rightarrow x$ pour la norme $\|\cdot\|_{G_r}$. Alors, on se donne $\epsilon > 0$, donc il existe $n_0(\epsilon)$ tel que

$$\forall n, m \geq n_0(\epsilon) (n < m) \quad \text{on ait} \quad \|x_n - x_m\|_{G_r} = \|x_n - x_m\| + \|T(x_n - x_m)\| < \epsilon$$

et donc la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X_1 et par suite, il existe $x \in X_1$ tel que $x_n \rightarrow x$ dans X_1 . Aussi, on a $\|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\| < \epsilon$ et donc la suite $(T(x_n))$ est de Cauchy dans X_2 et comme X_2 est un espace de Banach, alors il existe $y \in X_2$ tel que $Tx_n \rightarrow y$, mais T est fermé, donc d'après la Proposition 2.1.2, $x \in D(T)$ et $Tx = y$ et de plus $x_n \rightarrow x$ pour la norme du graphe $\|\cdot\|_{G_r}$.

Proposition 2.1.3. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . Alors T est un opérateur linéaire borné de $(D(T), \|\cdot\|_{G_r})$ dans X_2 .*

Preuve. On aura $\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_{G_r}, \forall x \in D(T)$ et par suite, on a $\|Tx\| \leq \|x\|_{G_r}$, ceci montre le résultat.

Proposition 2.1.4. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 et soit B linéaire borné de X_1 dans X_2 . Alors T est un opérateur fermé si et seulement si $T + B$ est fermé.*

Preuve. Soit T linéaire et B borné, montrons que $T + B$ est fermé. Tout d'abord $D(T + B) = D(T) \cap X_1 = D(T)$. D'autre part, soit $(x_n)_n$ une suite dans $D(T + B) = D(T)$ telle que $x_n \rightarrow x$ dans X_1 et $(T + B)x_n \rightarrow y$. Montrer que $(T + B)x = y$.

Comme B est linéaire borné, et comme $x_n \rightarrow x$ donc $Bx_n \rightarrow Bx$ et par suite, le fait que $(T + B)x_n \rightarrow y$ montre que $Tx_n \rightarrow y - Bx$, par suite la fermeture de T implique que $Tx = y - Bx$ et donc $(T + B)x = y$, ceci montre la première implication. Inversement, si on écrit

$$T = (T + B) - B = A - B$$

en posant $A = T + B$, alors si $T + B$ est fermé donc A est fermé et B borné, donc $-B$ est borné et par suite $A - B$ est fermé par application de la première implication et donc T est fermé.

Proposition 2.1.5. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire de domaine $D(T) \subseteq X_1$ dans X_2 . On suppose T injectif, alors T^{-1} de domaine $Im(T)$ (l'image de T) est un opérateur linéaire fermé.*

Preuve. Comme T est fermé, alors $G_r(T) = \{(x, Tx)/x \in D(T)\}$ est un ensemble fermé dans $X_1 \times X_2$. Mais $G_r(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}(y))/y \in Im(T)\} = h(G_r(T))$ où

$$\begin{aligned} h : X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_1 \times X_2 \\ (x, y) &\longrightarrow (y, x) \end{aligned}$$

qui est un homéomorphisme et comme l'image d'un ensemble fermé par un homéomorphisme est un ensemble fermé, il vient que $G_r(T^{-1}) = h(G_r(T))$ est fermé dans $X_1 \times X_2$ et par suite $T^{-1} : Im(T) \rightarrow X_1$ est un opérateur linéaire fermé (on n'a pas démontré la linéarité car elle est triviale)

Maintenant, pourquoi on s'intéresse précisément à cette classe d'opérateurs, tout d'abord, on va rappeler quelques outils de la théorie spectrale. Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ sur X ($A : D(A) \subset X \rightarrow X$). On appelle l'ensemble résolvant de A et on le note par $\rho(A)$ le sous-ensemble du plan complexe \mathbb{C} défini par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda Id_X - A \text{ est bijectif avec } (\lambda Id_X - A)^{-1} \text{ linéaire borné sur } X\}.$$

L'intérêt des opérateurs linéaires fermés provient en fait du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ sur X . Alors si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé.*

Preuve. Si $\rho(A) \neq \emptyset$, alors il va exister au moins $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X . D'autre part, comme $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est borné, alors il est fermé (en fait, on montre que chaque opérateur linéaire borné est fermé), aussi comme cet opérateur est injectif par application du Lemme 2.1.1, il vient que $(\lambda_0 Id_X - A)$ est un opérateur fermé de $D(A) = \text{Im}(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ dans X et par application de la Proposition 2.1.5, il vient que A est fermé.

Remarque 2.1.1. Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ sur un espace de Banach X . Alors si A n'est pas fermé alors $\rho(A) = \emptyset$.

Le spectre d'un opérateur linéaire fermé de domaine A sur X est l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ noté par $\sigma(A)$.

Théorème classique d'analyse fonctionnelle

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ sur un espace de Banach X . Alors l'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe \mathbb{C} et par suite son spectre $\sigma(A)$ est un sous-ensemble fermé du plan complexe \mathbb{C} . De plus, si $\rho(A) \neq \emptyset$ alors l'application $\lambda \in \rho(A) \rightarrow (\lambda Id_X - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ si $\rho(A) \neq \emptyset$ est une application analytique (holomorphe).

Remarque 2.1.2. Par application analytique $\lambda \in \rho(A) \rightarrow (\lambda Id_X - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, on veut dire que $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$, il va exister $\epsilon_{\lambda_0} > 0$ tel que $\forall \lambda \in D(\lambda_0, \epsilon_{\lambda_0}) \subseteq \mathbb{C}$, on a

$$f(\lambda) = (\lambda Id_X - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

où c_n est un opérateur linéaire borné $\forall n \geq 1, c_n = \frac{((\lambda_0 Id_X - A)^{-1})^{(n)}}{n!}$.

Maintenant, on énonce le résultat sur l'identité de la résolvante qui joue un rôle crucial, notamment en ce qui concerne la conservation des résultats de compacité ou de faible compacité par des arguments d'analyticité.

Proposition 2.1.6. Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné avec $\rho(A) \neq \emptyset$, alors $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$, on a

$$R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1, A)R(\lambda_2, A) \quad (2.1.1)$$

Preuve. Il est facile de voir que $\forall \lambda_2, \lambda_1 \in \rho(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda_1, A) - R(\lambda_2, A) &= R(\lambda_1, A) [(\lambda_2 Id_X - A) - (\lambda_1 Id_X - A)] R(\lambda_2, A) \\ &= R(\lambda_1, A) [(\lambda_2 - \lambda_1) Id_X] R(\lambda_2, A) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1, A) R(\lambda_2, A). \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est compact sur X , alors $\forall \lambda \in \rho(A)$, on a $(\lambda Id_X - A)^{-1}$ est compact.*

Preuve. Le résultat se déduit par application de l'identité (2.1.1) en remplaçant λ_1 par λ et λ_2 par λ_0 .

Corollaire 2.1.2. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné sur X avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose que $B \in \mathcal{L}(X)$ avec $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1} B$ est compact pour un certain $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors on a $(\lambda Id_X - A)^{-1} B$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Preuve. Ce résultat se déduit en composant à droite l'identité (2.1.1) par B et en remplaçant λ_1 par λ et λ_2 par λ_0 .

Corollaire 2.1.3. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné sur X avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est faiblement compact sur X , alors $\forall \lambda \in \rho(A)$, on a $(\lambda Id_X - A)^{-1}$ est aussi faiblement compact.*

Corollaire 2.1.4. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné sur X avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose que $B \in \mathcal{L}(X)$ avec $B(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est compact pour un certain $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors $B(\lambda Id_X - A)^{-1}$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Corollaire 2.1.5. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné sur X avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose que $B \in \mathcal{L}(X)$ avec $(\lambda_0 Id_X - A)^{-1} B$ est faiblement compact pour un certain $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors $(\lambda Id_X - A)^{-1} B$ est faiblement compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Corollaire 2.1.6. *Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire non borné sur X avec $\rho(A) \neq \emptyset$. On suppose que $B \in \mathcal{L}(X)$ avec $B(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}$ est faiblement compact pour un certain $\lambda_0 \in \rho(A)$, alors $B(\lambda Id_X - A)^{-1}$ est faiblement compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Remarque 2.1.3. Les résultats des Corollaires 2.1.2, 2.1.4, 2.1.5 et 2.1.6 ne restent pas vrais si on suppose qu'il existe un entier $n_{\lambda_0} > 1$ tel que

$$[(\lambda_0 Id_X - A)^{-1} B]^{n_{\lambda_0}}$$

est compact (faiblement compact) ou

$$[B(\lambda_0 Id_X - A)^{-1}]^{n_{\lambda_0}}$$

est compact (resp. faiblement compact) car dans ce cas, il n'y a aucune raison pour que l'opérateur $[(\lambda Id_X - A)^{-1} B]^{n_{\lambda_0}} - [(\lambda_0 Id_X - A)^{-1} B]^{n_{\lambda_0}}$ soit compact, dû à la non-commutativité des opérateurs.

Le théorème suivant montre en fait que la classe d'opérateurs linéaires fermés à domaines denses sur un espace de Banach est assez large, elle contient en particulier celle des générateurs infinitésimaux de c_0 -semigroupe sur cet espace de Banach.

Théorème 2.1.1. Soit X un espace de Banach est soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur X . Alors son générateur A est fermé à domaine dense sur X .

Preuve. Soit $x \in X$, alors si on note par x_n la suite définie par $x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} S(t)x dt$, où $t_n \rightarrow 0$, alors d'un coté, le Théorème 1.2.4 montre que $x_n \in D(A)$ et de plus la proposition 2.1.4 montre aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et ceci montre que $D(A)$ est dense sur X . Montrons maintenant la fermeture de A . Soit $(x_n) \subset D(A)$ et $x_n \rightarrow x$ dans X et $Ax_n \rightarrow y$, alors on a

$$\begin{aligned} S(t)x_n - x_n &= \int_0^t \frac{d}{ds} S(s)x_n ds \\ &= \int_0^t S(s)Ax_n ds \end{aligned}$$

(voir Théorème 1.2.4). D'autre part, comme $Ax_n \rightarrow y$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Ax_n - y\| = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t S(s)Ax_n ds - \int_0^t S(s)y ds \right\| &= \left\| \int_0^t S(s)(Ax_n - y) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|S(s)(Ax_n - y)\| ds \\ &\leq \int_0^t \|S(s)\| \|Ax_n - y\| ds \\ &\leq tM_t \|Ax_n - y\| \end{aligned}$$

et par passage à la limite, il vient que

$$\int_0^t S(s)Ax_n ds \longrightarrow \int_0^t S(s)y ds$$

et par suite, par passage à la limite ($n \longrightarrow +\infty$), on obtient que

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)y ds$$

Maintenant, en divisant sur $t > 0$, il vient que

$$\frac{S(t)x - x}{t} = \left(\frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds \right) y = \frac{1}{t} \int_0^t S(s)y ds$$

et par passage à la limite ($t \longrightarrow 0$), on déduit que

$$Ax = y$$

Ceci prouve le résultat.

Définition 2.1.4. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe sur un espace de Bannach X . Alors $(S(t))_{t \geq 0}$ est dit un c_0 -semigroupe de contraction si $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

Remarque 2.1.4. Il est facile de constater que si $(S(t))_{t \geq 0}$ un c_0 -semigroupe de contractions alors son type ω est un élément de l'intervalle $[-\infty, 0]$, en effet, on a dans ce cas $\omega = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln 1}{t} = 0$, par l'utilisation de la croissance de la fonction logarithmique sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et par suite $\omega \in [-\infty, 0]$.

Le théorème suivant dû à E. Hille et K. Yosida dans les années 40 et dit Théorème de Hille-Yosida est un outil puissant pour la caractérisation des générateurs infinitésimaux de c_0 -semigroupes de contractions sur un espace de Banach. Il a été établi en 1940. On verra plus loin que ce théorème possède une version plus générale pour le cas de c_0 -semigroupes.

Théorème 2.1.2. Soit A un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach X . Alors A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semigroupe de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ si et seulement si

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
2. on a $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et

$$\|R(\lambda, A) = (\lambda Id_X - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

Preuve. D'après le Théorème 2.1.1, si A est le générateur infinitésimal d'un c_0 -semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$, alors A est fermé et $\overline{D(A)} = X$. Maintenant, on se donne $\lambda > 0$ et soit $x \in X$. On note par

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

Montrons tout d'abord que les opérateurs $R(\lambda)$ sont linéaires bornés. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|x\| dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \|x\| \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

et leur linéarité est triviale. On signale que ces intégrales sont majorées par des intégrales impropres des applications $t \rightarrow e^{-\lambda t} \|S(t)\|x$ qui sont continus et uniformément bornés car $\forall t \geq 0$, si on note $h(t) = e^{-\lambda t} \|S(t)\|x$, alors $\|h(t)\| \leq \|x\|$. De plus, pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - Id_X}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (S(t+h)x - S(t)x) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} S(t)x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \left[\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right] - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right]. \end{aligned}$$

Par l'utilisation de la relation de Chasles, on a

$$\int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt = \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \tag{2.1.3}$$

et donc, en remplaçant dans 2.1.3, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - Id_X}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt - \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \right) - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right] \\ &= \frac{1}{h} (e^{\lambda h} - 1) \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right] - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \end{aligned}$$

En faisant tendre $h \rightarrow 0$, il vient que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{\lambda h} - 1) = \lambda$$

car cette limite est la dérivée de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$ au point $t = 0$. De plus, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt = x$$

et par suite, on trouve que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - Id_X}{h} R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \quad (\text{existe})$$

et par conséquent $R(\lambda)x \in D(A)$ et $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$ car par définition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - Id_X}{h} R(\lambda)x = AR(\lambda)x.$$

D'autre part, la relation

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$

implique que

$$(\lambda Id_X - A)R(\lambda)x = x \tag{2.1.4}$$

Remarque 2.1.5. Dans la relation 2.1.4, on a utilisé la commutativité entre le semi groupe et le générateur qui découle du Théorème 1.2.4

D'autre part, soit $x \in D(A)$, si on pose

$$x_n = \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x dt$$

alors $x_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$ car

$$\|x_n - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt\| = \left\| \int_n^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda n} \|x\|$$

et comme $e^{-\lambda n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$, il vient que $x_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt$ dans X . De plus,

$$Ax_n = A \left(\int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x dt \right) = \int_0^n e^{-\lambda t} AS(t)x dt = \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax dt = y \tag{2.1.5}$$

et comme A est fermé, alors

$$A \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax dt$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AS(t)x dt \\ &= A \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x dt \right) = AR(\lambda)x \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

et par suite, on obtient

$$R(\lambda)(\lambda Id_X - A)x = x \quad \text{pour } x \in D(A). \quad (2.1.7)$$

Donc l'inverse de $(\lambda Id_X - A)$ (la résolvante de A) existe pour $\lambda > 0$ et satisfait le fait que $\|R(\lambda)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \forall x \in X$

Pour montrer la condition suffisante, on aura besoin de quelques résultats et lemmes préparatoires.

Lemme 2.1.2. On suppose que A satisfait les conditions 1 et 2 du Théorème de Hille-Yosida et soit $R(\lambda, A) = (\lambda Id_X - A)^{-1}$. Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \quad (x \in X)$$

Preuve. Tout d'abord, étudions le cas $x \in D(A)$. On a d'après la preuve de la condition nécessaire du Théorème de Hille-Yosida

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = AR(\lambda, A)x$$

et par suite

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Maintenant, soit $x \in X$, comme $\overline{D(A)} = X$, alors soit $(x_n) \subset D(A)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et par suite

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n + \lambda R(\lambda, A)x_n + x_n - x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| + \lambda \|R(\lambda, A)\| \|x_n - x\| \end{aligned}$$

car $\lambda R(\lambda, A)$ est borné ($\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$) et en utilisant la preuve ci-dessus pour $x \in D(A)$, il vient que par passage à la limite que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$$

ce qui termine la preuve de lemme.

Définition 2.1.5. Pour A satisfaisant les conditions 1 et 2 du Théorème de Hille-Yosida, on définit l'approximation de Yosida de A par

$$\begin{aligned} H_\lambda &= \lambda A R(\lambda, A) = \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I_X] \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda Id_X \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Le lemme suivant montre en fait que l'approximation de Yosida de A converge ponctuellement vers A pour tout x dans $D(A)$.

Lemme 2.1.3. On suppose que A est un opérateur linéaire non borné satisfaisant les hypothèses 1 et 2 du Théorème de Hille-Yosida. Alors $\forall x \in D(A)$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H_\lambda x = Ax$$

Preuve. On a par définition de H_λ et par le Lemme 2.1.2

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} H_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax. \quad (2.1.9)$$

Ceci donne le résultat.

Proposition 2.1.7. Soit A un opérateur linéaire qui satisfait les hypothèses (i) et (ii) du Théorème de Hille-Yosida. Si H_λ est l'approximation de Yosida de A , alors H_λ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe uniformément continue e^{tH_λ} . De plus, $\forall x \in X$ et $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$, on a

$$\|e^{tH_{\lambda_1}}x - e^{tH_{\lambda_2}}x\| \leq t\|H_{\lambda_1}x - H_{\lambda_2}x\| \quad (2.1.10)$$

Preuve. Tout d'abord H_λ est un opérateur linéaire borné car $R(\lambda, A)$ est borné et l'opérateur Id_X est aussi borné et donc d'après le Lemme 1.1.1 et la Proposition 1.1.1, H_λ est le générateur infinitésimal du c_0 -semigroupe uniformément continue e^{tH_λ} d'opérateurs linéaires bornés. De plus, le fait que $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0$ montre que

$$\|e^{tH_\lambda}\| = \|e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} \leq 1.$$

Car $e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} = e^{-t\lambda[1-\lambda\|R(\lambda,A)\|]}$ et $1 - \lambda\|R(\lambda,A)\| \geq 0$ et par suite e^{tH_λ} est un c_0 -semigroupe de contractions. D'autre part, de la définition des opérateurs $e^{tH_{\lambda_1}}, e^{tH_{\lambda_2}}, A_{\lambda_1}$ et A_{λ_2} , il est facile de voir que ces opérateurs commutent. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|e^{tH_{\lambda_1}}x - e^{tH_{\lambda_2}}x\| &= \left\| \int_0^1 (e^{tsH_{\lambda_1}}e^{t(1-s)H_{\lambda_2}}x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{tsH_{\lambda_1}}e^{t(1-s)H_{\lambda_2}}(A_{\lambda_1}x - A_{\lambda_2}x)\| ds \\ &\leq t \|H_{\lambda_1}x - H_{\lambda_2}x\|. \end{aligned}$$

Définition 2.1.6. Soit X un espace de Banach et soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires sur X . On dit que A_2 est une extension de A_1 si $D(A_1) \subset D(A_2)$ et $A_2x = A_1x, \forall x \in D(A_1)$.

Preuve du Théorème de Hille-Yosida (condition suffisante) : On se donne $x \in D(A)$.

Alors, on a

$$\|e^{tH_{\lambda_1}}x - e^{tH_{\lambda_2}}x\| \leq t \|H_{\lambda_1}x - H_{\lambda_2}x\| \leq t \|H_{\lambda_1}x - Ax\| + t \|Ax - H_{\lambda_2}x\|. \quad (2.1.11)$$

De l'équation 2.1.11 et le Lemme 2.1.3, il s'ensuit que pour $x \in D(A)$, e^{tH_λ} converge pour $\lambda \rightarrow \infty$ et la convergence est uniforme sur les intervalles fermés bornés due à la convergence uniforme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n H_\lambda^n}{n!}$ sur les intervalles fermés bornés. Comme $D(A)$ est dense dans X et $\|e^{tH_{\lambda_1}}\| \leq 1$, il vient que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tH_\lambda} = S(t)x, \quad \forall x \in X \quad (2.1.12)$$

Par application du Théorème de Banach-Steinhaus (on aura la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés) et la même chose la limite dans l'équation 2.1.12 est aussi uniforme sur les intervalles bornés pour la même raison indiquée ci-dessus. Montrons à présent que la famille $(S(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semigroupe.

Propriété algébrique I)

1. On a $S(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{0H_\lambda}x = x$ et donc $S(0) = Id_X$.

2. On a

$$\begin{aligned} S(t_1 + t_2)x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t_1+t_2)H_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{t_1 H_\lambda} (e^{t_2 H_\lambda} x) \\ &= S(t_1)[S(t_2)x] \\ &= S(t_1)S(t_2)x \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

et par suite $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$.

Propriété topologique II)

On a

$$\begin{aligned} \|S(t)x - x\| &= \|S(t)x - e^{tH_\lambda}x + e^{tH_\lambda}x - x\| \\ &\leq \|S(t)x - e^{tH_\lambda}x\| + \|e^{tH_\lambda}x - x\|. \end{aligned}$$

Alors sur chaque intervalle fermé borné de la forme $[0, \alpha]$, on peut choisir λ suffisamment grand tel que

$$\|S(t)x - e^{tH_\lambda}x\| < \frac{\epsilon}{2}$$

D'autre part, comme la famille (e^{tH_λ}) est un c_0 -semigroupe, il va exister un intervalle suffisamment petit $[0, \delta]$ tel que

$$\|e^{tH_\lambda}x - x\| < \frac{\epsilon}{2} \quad t \in [0, \delta].$$

Donc si on fixe un certain $\alpha > 0$ et si on prend $\eta = \min(\alpha, \delta)$, on aura

$$\|S(t)x - x\| < \epsilon \quad \text{pour } t < \eta$$

et par suite $(S(t))_{t \geq 0}$ est un c_0 -semigroupe de contractions.

Bibliographie

- [1] K. J. Engel and R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, 2000.
- [2] B. Maurey, Cours de théorie spectrale et analyse fonctionnelle, Année 2001-2002, Université Paris 7.
- [3] M. Mokhtar-kharroubi, Mathematical Topics in Neutron Transport Theory, World Scientific, 1997.
- [4] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1992.
- [5] N. Redjel and A. Dehici, Some compactness and interpolation results in linear Boltzmann equation, J. Function. Spaces, Hindawi, 2015.